

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Milan Harcek

Scénářové struktury ve vícestupňových stochastických úlohách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická
statistika a ekonometrie

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Bc. Milan Harcek

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce pánovi doc. RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D. a pánovi Václavovi Kozmíkovi, Ph.D. za ich trpezlivosť, odborné pripomienky a nápady na zlepšenie diplomovej práce.

Název práce: Scénářové struktury ve vícestupňových stochastických úlohách

Autor: Bc. Milan Harcek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se věnuje úlohám vícestupňového stochastického programování v kontextu různých způsobů reprezentace náhodného procesu. Základní formou reprezentace náhodného procesu je scénářový strom. V práci jsou popsány vlastnosti obecného a po stupních nezávislého scénářového stromu. Scénářové stromy jsou nakonec kombinovány s markovskými řetězci, které popisují stav systému a určují tak, který scénářový strom se má použít. V práci je popsána taky scénářová mřížka, která umožňuje redukovat komplexitu oproti obecné verzi scénářového stromu. Scénářové stromy jsou generovány metodou momentů. Pomocí scénářových stromů jsou reprezentovány náhodné výnosy, které vstupují do optimalizačního problému privátního investora.

Klíčová slova: vícestupňové stochastické programování, scénářový strom, markovský řetězec, problém privátního investora

Title: Scenario structures in multistage stochastic programs

Author: Bc. Milan Harcek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with multi-stage stochastic programming in the context of random process representation. Basic structure for random process is a scenario tree. The thesis introduces general and stage-independent scenario tree and their properties. Scenario trees can be also combined with Markov chains which describe the state of the system and determine which scenario tree should be used. Another structure which enables reduce the complexity of the problem is a scenario lattice. Scenario generation is performed using moment method. Scenario trees are used for representation of random returns as the input to the investment problem.

Keywords: multistage stochastic programming, scenario tree, Markov chain, investment problem

Názov práce: Scenárové štruktúry vo viacstupňových stochastických úlohách

Autor: Bc. Milan Harcek

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Abstrakt: Práca sa venuje úlohám viacstupňového stochastického programovania v kontexte rôznych spôsobov reprezentácie náhodného procesu. Základnou formou reprezentácie náhodného procesu je scenárový strom. V práci sú popísané vlastnosti všeobecného a po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Scenárové stromy sú nakoniec kombinované s markovskými reťazcami, ktoré popisujú stav systému a určujú tak, ktorý scenárový strom sa má použiť. V práci je popísaná aj scenárová mriežka, ktorá umožňuje redukovať komplexnosť oproti všeobecnej verzii scenárového stromu. Scenárové stromy sú generované metódou momentov. Pomocou scenárových stromov sú reprezentované náhodné výnosy, ktoré vstupujú do optimalizačného problému privátneho investora.

Kľúčové slová: viacstupňové stochastické programovanie, scenárový strom, markovský reťazec, problém privátneho investora

Obsah

Úvod	2
1 Viacstupňové stochastické programovanie	4
1.1 Úloha nelineárneho programovania	4
1.2 Úloha lineárneho programovania	4
1.3 Úloha viacstupňového stochastického programovania	5
1.3.1 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie	7
2 Konečné diskkrétne rozdelenie	10
2.1 Scenárový strom	10
2.1.1 Po stupňoch nezávislý scenárový strom	15
2.2 Kombinácia s makovským reťazcom	16
2.3 Scenárová mriežka	18
2.4 Investičný problém	19
2.4.1 Problém privátneho investora	19
2.4.2 Mean CVaR model	20
3 Diskretizácia spojitého rozdelenia	25
3.1 Generovanie scenárov	25
4 Praktická časť	33
4.1 Dáta	33
4.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom	34
4.2.1 Dvojstupňový scenárový strom	35
4.2.2 Trojstupňový scenárový strom	38
4.3 Kombinácia s markovským reťazcom	40
4.3.1 Rekurentná metóda najmenších štvorcov	40
4.3.2 Dáta	42
4.3.3 Dvojstupňový scenárový strom	43
4.3.4 Trojstupňový scenárový strom	44
4.4 Porovnanie scenárových štruktúr	46
Záver	48
Zoznam použitej literatúry	50
Zoznam obrázkov	52
Zoznam tabuliek	53
Zoznam použitých skratiek	54

Úvod

Základy teórie výberu portfólia položil Harry Max Markowitz vo svojom článku [Markowitz \(1952\)](#). Markowitzov model je statický a vyberá portfólio jednorázovo, na základe našich očakávaní o vývoji náhodných výnosov v budúcnosti. Naproti tomu viacstupňové stochastické modely sa rozhodujú nielen na základe budúcich realizácií náhodných výnosov, ale aj na základe možných budúcich výberov portfólia v budúcich obdobiach.

Jednou z možností, ako reprezentovať náhodný vývoj výnosov akcií, je použitie scenárov, ktorým priradíme pravdepodobnosť realizácie. So scenármi následne pracujeme ako s diskretným rozdelením náhodnej veličiny. Základnou formou reprezentácie scenárov je reprezentácia pomocou scenárového stromu.

Cieľom práce je popis konštrukcie a vlastností rôznych scenárových štruktúr a ich použitie v optimalizačnom probléme privátneho investora. Okrem po stupňoch nezávislého stromu skonštruujeme scenárový strom, ktorý závisí od stavov markovského reťazca. Takto použitý scenárový strom je aplikovaný napríklad v článku [Philpott a De Matos \(2012\)](#) pre úlohu hydrotermálneho plánovania, avšak použitie v úlohách optimálneho výberu investičného portfólia sa v nami známej literatúre doposiaľ nevyskytuje. Navrhujeme vlastnú konštrukciu markovského reťazca s dvoma stavmi, ktoré reprezentujú obdobie stabilných výnosov, ktoré budeme nazývať ako bezkrízové obdobie a obdobie nízkych výnosov, typicky nasledovaných ich vysokou volatilitou, ktoré budeme nazývať ako krízové obdobie. Na identifikáciu bodov nestability v časovom rade výnosov a hľadanie krízových a bezkrízových období použijeme metódu rekurzívnych reziduí, popísanú v knihe [Cipra \(2008\)](#).

Pri popise konštrukcie scenárového stromu vychádzame z kníh [Kall a Mayer \(2005\)](#) a [Shapiro a kol. \(2009\)](#) a z odkazov na literatúru v nich. Grafické znázornenie scenárového stromu závislého na markovskom reťazci preberáme z článku [Philpott a De Matos \(2012\)](#).

Scenárový strom generujeme po jednotlivých stupňoch pomocou známeho heuristického algoritmu z článku [Høyland a kol. \(2003\)](#). Vstupom do algoritmu sú prvé štyri momenty a korelačná matica pôvodného rozdelenia.

Ako optimalizačný problém definujeme viacstupňovú úlohu výberu investičného portfólia, známu aj ako problém privátneho investora. Pri definovaní obmedzení úlohy vychádzame z úlohy finančného plánovania uvedenej v knihe [Birge a Louveaux \(2011\)](#), z článku [Gülpinar a kol. \(2003\)](#) a prác [Laurent \(2006\)](#) a [Malá \(2014\)](#). Predpokladáme, že sme investor, ktorý sa rozhodne investovať čiastku B , pričom na konci investičného obdobia chce zhodnotiť investovaný majetok aspoň na čiastku G . Vytvoríme si portfólio n akcií, ktoré môžeme v priebehu času na základe postupného spoznávania budúcich výnosov niekoľkokrát preskúpiť, aby sme dosiahli čo najväčší zisk. Za účelovú funkciu volíme vážený súčet podmienených hodnôt v riziku CVaR, pričom vychádzame z článku [Shapiro \(2009\)](#) a práce [Malá \(2014\)](#).

V prvej kapitole predstavíme úlohu matematického programovania. Od všeobecného zápisu jednostupňovej deterministickej úlohy prejdeme k viacstupňovému stochastickému programovaniu. Ako špeciálny prípad uvedieme zápis úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania, ktorý budeme ďalej po-

užívať. V druhej kapitole sa budeme zaoberať náhodným procesom s diskretným časom a s diskretným počtom stavov a popíšeme konštrukciu a vlastnosti scenárového stromu. Ako špeciálny prípad uvedieme po stupňoch nezávislý scenárový strom a strom, ktorý závisí od stavov markovského reťazca. Ďalej načrtujeme konštrukciu scenárovej mriežky, ako ďalšej možnej scenárovej štruktúry. Po definovaní úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskretným rozdelením definujeme optimalizačnú úlohu výberu investičného portfólia. V tretej kapitole popíšeme algoritmus generovania scenárového stromu, vychádzajúc z článku [Høyland a kol. \(2003\)](#). Cieľom algoritmu je vygenerovať scenáre s danými prvými štyrmi momentmi a korelačnou maticou. Algoritmus využíva dve transformácie, kubickú transformáciu na získanie požadovaných momentov a maticovú transformáciu na získanie požadovanej korelačnej matice. Štvrtá kapitola je venovaná praktickej časti. Pomocou poznatkov z teoretickej časti skonštruujeme rôzne scenárové stromy a dosadíme ich do optimalizačnej úlohy, pričom budeme sledovať stabilitu navrhnutého optimalizačného modelu. V závere zhrnieme hlavné výstupy práce.

Generovanie scenárových stromov a výpočet optimalizačnej úlohy realizujeme v softvéri Mathematica 11.0 na štvorjadrovom počítači.

1. Viacstupňové stochastické programovanie

Všeobecne myslíme pod úlohou matematického programovania hľadanie extrémov funkcie na danej množine. Pozornosť upriamime na hľadanie minima reálnej funkcie. Základy úlohy matematického programovania je možné nájsť napríklad v knihe [Dupačová a Lachout \(2011\)](#). Nech $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Úlohu matematického programovania môžeme zapísať v tvare

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} & \mathbf{x} \in M. \end{array} \quad (1.1)$$

V kontexte matematického programovania sa funkcia f nazýva *účelová funkcia* a množina M *množina prípustných riešení*. Uvedieme Weierstrassovu vetu, ktorá hovorí, za akých podmienok nadobúda funkcia svoje (globálne) minimum.

Veta 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna obmedzená a uzavretá množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom f nadobúda na M svoje minimum.*

Dôkaz. [Bazaraa a kol. \(2006\)](#)

□

1.1 Úloha nelineárneho programovania

V praktických úlohách býva množina M zadaná ako množina bodov spĺňajúcich obmedzenia vyjadrené systémom funkčných nerovností a rovností. Nech $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $g_{j_1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j_1 = 1, \dots, m_1$ a $h_{j_2} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j_2 = 1, \dots, m_2$. Príkladom množiny prípustných riešení je

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}; g_{j_1}(\mathbf{x}) \geq 0, j_1 = 1, \dots, m_1, h_{j_2}(\mathbf{x}) = 0, j_2 = 1, \dots, m_2\}.$$

Ak je účelová funkcia, alebo aspoň jedna funkcia z obmedzení nelineárna, dostávame *úlohu nelineárneho programovania*

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} & g_{j_1}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j_1 = 1, \dots, m_1, \\ & h_{j_2}(\mathbf{x}) = 0, \quad j_2 = 1, \dots, m_2, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{array} \quad (1.2)$$

Poznámka. Stačí uvažovať nerovnosti v jednom smere. Ak je v sústave funkčných nerovností nerovnosť v tvare $g(\mathbf{x}) \leq 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, kde $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, pre násobením -1 dostaneme $-g(\mathbf{x}) \geq 0$, kde $-g$ je opäť funkcia spĺňajúca $-g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.2 Úloha lineárneho programovania

Pokiaľ sú funkcie f , g_{j_1} , $j_1 = 1, \dots, m_1$ a h_{j_2} , $j_2 = 1, \dots, m_2$ lineárne, nazývame úlohu [\(1.2\)](#) *úlohou lineárneho programovania*. Špeciálnym tvarom úlohy

lineárneho programovania je *štandardný tvar* úlohy lineárneho programovania. Nech $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom úlohou lineárneho programovania v štandardnom tvare budeme nazývať úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Poznámka. (Dupačová a Lachout (2011))

Každú úlohu lineárneho programovania môžeme prepísať do štandardného tvaru (1.3).

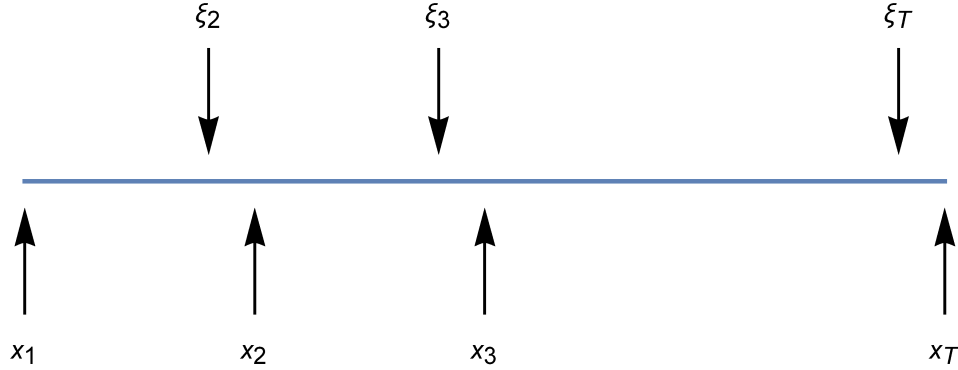
1.3 Úloha viacstupňového stochastického programovania

V probléme privátneho investora často vstupuje pri hľadaní správneho portfólia do nášho rozhodnutia neistota a na základe postupného odkrývania budúcich výnosov požadujeme možnosť preusporiadania portfólia viackrát v čase za sebou. Takéto typy úloh je vhodné riešiť pomocou *viacstupňového stochastického programovania*. Vo viacstupňovom stochastickom programovaní sa rozhodujeme nielen na základe v súčasnosti dostupných informácií, ale zahŕňa v sebe aj možné rozhodnutia v budúcnosti, na základe informácií dostupných v budúcnosti. V nasledujúcej časti popíšeme bližšie rozhodovací proces a formulujeme úlohu viacstupňového stochastického programovania. V literatúre je možné nájsť viacero formulácií viacstupňového stochastického programovania. My niektoré z nich popíšeme, pričom budeme vychádzať prevažne z kníh Shapiro a kol. (2009) a Kall a Mayer (2005).

V celej práci predpokladáme, že Ω je neprázdna množina, \mathcal{A} je σ -algebra podmnožín množiny Ω a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Pre $T \in \mathbb{N}$ definujeme náhodné vektory $\xi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_t}$, $t = 1, \dots, T$ a predpokladajme, že tvoria *náhodný (stochastický) proces* $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$. V úlohe viacstupňového stochastického programovania predpokladáme, že naše rozhodnutie v čase $t \in \{1, \dots, T\}$ závisí len na *histórii* náhodného procesu do času t , pričom históriou náhodného procesu do času t myslíme vektor $\xi_{[t]} := (\xi_1, \dots, \xi_t)$. Daný predpoklad sa v knihách Shapiro a kol. (2009), Kall a Mayer (2005), ale aj v ostatnej literatúre označuje ako *princíp neanticipativity*.

Na obrázku I.1 je graficky znázornený rozhodovací proces v úlohe viacstupňového stochastického programovania. *Stupňami* nazývame časy $t = 1, \dots, T$, v ktorých robíme jednotlivé rozhodnutia. Proces rozhodovania v úlohe viacstupňového programovania popíšeme v nasledujúcich bodoch:

- Hodnotu vektoru $\xi_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ považujeme za konštantnú a známu ešte pred rozhodnutím v prvom stupni, preto ju z grafického znázornenia vynechávame.
- Vektor $\mathbf{x}_1 \in M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ reprezentuje rozhodnutie v prvom stupni, kde M_1 je množina všetkých prípustných rozhodnutí v prvom stupni.



Obr. 1.1: Grafické znázornenie rozhodovacieho procesu v úlohe viacstupňového stochastického programovania.

- Vektor $\mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2) \in M_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2) \subset \mathbb{R}^{n_2}$ reprezentuje rozhodnutie v druhom stupni, ktoré závisí na rozhodnutí v prvom stupni \mathbf{x}_1 a na náhodnom vektore $\boldsymbol{\xi}_2$. $M_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2)$ je množina všetkých prípustných rozhodnutí v druhom stupni, v závislosti na \mathbf{x}_1 a $\boldsymbol{\xi}_2$. Podobne postupujeme až do stupňa T .
- Vektor $\mathbf{x}_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_T) \in M_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_T) \subset \mathbb{R}^{n_T}$ reprezentuje posledné rozhodnutie v stupni T , ktoré závisí na rozhodnutiach zo všetkých predchádzajúcich stupňov a na celej histórii náhodného procesu $\boldsymbol{\xi}_{[T]}$. $M_T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}; \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_T)$ je množina všetkých prípustných rozhodnutí v stupni T , v závislosti na $\mathbf{x}_{[T-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[T]}$.

Poznámka. Skrátene budeme rozhodnutie v stupni $t = 2, \dots, T$ zapisovať v tvare

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \subset \mathbb{R}^{n_t}. \quad (1.4)$$

Zo zápisu (1.4) je vidieť, že optimálne riešenie \mathbf{x}_t v stupni $t \in \{1, \dots, T\}$ závisí len na histórii náhodného procesu do času t , a teda je zachovaný princíp neanticipativity.

V nasledujúcej časti uvedieme rôzne tvary úlohy viacstupňového stochastického programovania. V prvom prípade definujeme pojem *filtrácie* a formulujeme optimalizačný problém ako jednu veľkú optimalizačnú úlohu. Druhý zápis bude dynamický pomocou systému rekurzívnych rovníc. Nakoniec uvedieme úlohu viacstupňového programovania v tzv. *vnorenom* tvare.

Nech $T \in \mathbb{N}$ je počet stupňov v úlohe viacstupňového stochastického programovania, $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_T\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = d_1 + \dots + d_T$ je náhodný proces a $\mathcal{F}_t = \sigma(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \subset \mathcal{A}$, $t = 1, \dots, T$ je σ -algebra v Ω indukovaná históriou $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$.

Poznámka. Pre $t = 1$ platí, že \mathcal{F}_1 je σ -algebra indukovaná konštantným vektorom $\boldsymbol{\xi}_1$, preto $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ďalej platí, že $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$.

Množina σ -algebier $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T\}$ sa v literatúre nazýva *filtrácia*. Pre $n_t \in \mathbb{N}$, $t = 1, \dots, T$ definujeme rozhodovacie vektory ako \mathcal{F}_t -merateľné zobrazovania

$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_t}$. Ďalej predpokladáme, že $f_t : \mathbb{R}^{n_t} \times \mathbb{R}^{d_t} \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Všeobecne môžeme úlohu viacstupňového stochastického programovania zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E} \sum_{t=2}^T f_t(\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}), \boldsymbol{\xi}_t) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_1 \in M_1 \\ & \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) \text{ s.i., } t = 2, \dots, T \end{aligned} \quad (1.5)$$

Poznámka. Kvôli zjednodušeniu značenia budeme ďalej pre $t = 2, \dots, T$ používať namiesto $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$ zápis \mathbf{x}_t . Pokiaľ budeme chcieť zdôrazniť závislosť na histórii $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$, použijeme zápis $\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$.

Ďalší spôsob zápisu úlohy viacstupňového stochastického programovania je spätne pomocou systému rekurzívnych rovníc.

V stupni T formulujeme úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned} Q_T(\mathbf{x}_{[T-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[T]}) = \min \quad & f_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\xi}_T) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_T \in M_T(\mathbf{x}_{[T-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[T]}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

kde optimálna hodnota úlohy (1.6) závisí na daných vektoroch $\mathbf{x}_{[T-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[T]}$.

V stupňoch $t = 2, \dots, T-1$ formulujeme úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned} Q_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \min \quad & f_t(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}_t) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}_{t+1}} [Q_{t+1}(\mathbf{x}_{[t]}; \boldsymbol{\xi}_{[t+1]}) | \boldsymbol{\xi}_{[t]}] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_t \in M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde optimálna hodnota úlohy (1.7) závisí na daných vektoroch $\mathbf{x}_{[t-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$. Hlavným princípom tohto zápisu je rekurzívny výpočet hodnôt $Q_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$ pre dané vektory $\mathbf{x}_{[t-1]}$ a $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$, a to spätne od posledného stupňa T .

V prvom stupni nakoniec riešime úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}_2} [Q_2(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\xi}_2)] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x}_1 \in M_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pre zjednodušenie zápisu označme $M_t = M_t(\mathbf{x}_{[t-1]}; \boldsymbol{\xi}_{[t]})$, $t = 2, \dots, T$. Potom úlohu viacstupňového stochastického programovania môžeme formulovať v tzv. *vnorenom* tvare

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in M_1} f_1(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_2 \in M_2} f_2(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) + \mathbb{E} \left[\dots + \mathbb{E} \left[\min_{\mathbf{x}_T \in M_T} f_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\xi}_T) \right] \right] \right]$$

1.3.1 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie

V tejto časti uvedieme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania ako špeciálny prípad úlohy viacstupňového stochastického programovania, pričom budeme vychádzať z úlohy (1.5). Analogicky by sme mohli preformulovať aj zápis pomocou rekurzívnych rovníc (1.6) až (1.8), čo už v tejto časti robiť nebudeme. Miesto toho sa zameriame na transformáciu medzi dvoma typmi úloh viacstupňového stochastického lineárneho programovania, ktoré sa často používajú v literatúre: úloha s obmedzeniami v *dolnom trojuholníkovom* tvare a úloha s obmedzeniami v *schodiskovom* tvare. Príklad takejto transformácie preberieme z knihy [Kall a Mayer (2005)].

Nech sú splnené predpoklady úlohy (1.5) a pre $n_t, m_t \in \mathbb{N}$ predpokladajme, že $\mathbf{x}_t(\cdot), \mathbf{b}_t(\cdot), \mathbf{c}_t(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_t}$, $\mathbf{A}_{t,\tau}(\cdot) \in \mathbb{R}^{m_t \times n_t}$, $\tau = 1, \dots, t$ sú \mathcal{F}_t -merateľné, pre každé $t = 1, \dots, T$. Vychádzajúc z tvaru (1.5) môžeme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania zapísať ako

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbb{E} \sum_{t=2}^T \mathbf{c}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})^\top \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{1,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{t,1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{x}_1 + \sum_{\tau=2}^t \mathbf{A}_{t,\tau}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{x}_\tau(\boldsymbol{\xi}_{[\tau]}) = \mathbf{b}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T \\ & \mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \geq 0 \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Obmedzenia v úlohe (1.9) sú vyjadrené v tvare nazývanom *dolný trojuholníkový* tvar. Iný často používaný zápis úlohy je v tvare nazývanom *schodiskový*, v ktorom sa v obmedzeniach v stupňoch $t = 2, \dots, T$ vyskytuje len rozhodnutie v danom stupni t a rozhodnutie v predchádzajúcom stupni $t - 1$. Úloha (1.9) by bola v schodiskovom tvare, pokiaľ by pre $t = 3, \dots, T$ platilo, že $\mathbf{A}_{t\tau} = \mathbf{0}$, $\tau = 1, \dots, t - 2$. V takomto tvare je aj nami definovaný problém privátneho investora v ďalšej časti práce. Pokiaľ sú matice $\mathbf{A}_{t\tau}$ nenulové, je možné prejsť na schodiskový tvar pomocou nasledujúcej transformácie:

- Pre stupeň $t = 1$ definujme maticu $\mathbf{W}_1 := \mathbf{A}_{11}$. Matica \mathbf{W}_1 je typu $m_1 \times n_1$.
- Pre stupne $t = 2, \dots, T - 1$ definujme dve matice. Prvá bude v tvare

$$\mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{t,1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) & \mathbf{A}_{t,2}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) & \cdots & \mathbf{A}_{t,t-1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{1,t-1} \\ \mathbf{0}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{t-2,t-1} \\ \mathbf{0}_{t-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{t-1,t-2} & \mathbf{I}_{t-1} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I}_τ je jednotková matica typu $n_\tau \times n_\tau$ pre $\tau = 1, \dots, t - 1$ a $\mathbf{0}_{\tau_1, \tau_2}$ je nulová matica typu $n_{\tau_1} \times n_{\tau_2}$, pre $\tau_1, \tau_2 = 1, \dots, t - 1$, $\tau_1 \neq \tau_2$. Matica $\mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$ je typu $(m_t + n_1 + \dots + n_{t-1}) \times (n_1 + \dots + n_{t-1})$. Druhá matica bude v tvare

$$\mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{t,1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{t,t-1} & \mathbf{A}_{t,t}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ -\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{1,t} \\ \mathbf{0}_{2,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{t-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{t-1,t-2} & -\mathbf{I}_{t-1} & \mathbf{0}_{t-1,t} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I}_τ je opäť jednotková matica typu $n_\tau \times n_\tau$ pre $\tau = 1, \dots, t - 1$, $\mathbf{0}_{\tau_1, \tau_2}$ je nulová matica typu $n_{\tau_1} \times n_{\tau_2}$, pre $\tau_1 = 1, \dots, t - 1$, $\tau_2 = 1, \dots, t$, $\tau_1 \neq \tau_2$, $\mathbf{0}_{t,\tau}$ je matica typu $m_t \times n_\tau$, pre $\tau = 1, \dots, t - 1$. Matica $\mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})$ je typu $(m_t + n_1 + \dots + n_{t-1}) \times (n_1 + \dots + n_t)$.

- Nakoniec pre stupeň $t = T$ definujme

$$\mathbf{T}_T(\boldsymbol{\xi}_{[T]}) := (\mathbf{A}_{T,1}(\boldsymbol{\xi}_{[T]}), \dots, \mathbf{A}_{T,T-1}(\boldsymbol{\xi}_{[T]}))$$

maticu typu $m_T \times (n_1 + \dots + n_{T-1})$ a

$$\mathbf{W}_T(\boldsymbol{\xi}_{[T]}) := \mathbf{A}_{T,T}(\boldsymbol{\xi}_{[T]})$$

maticu typu $m_T \times n_T$.

Na základe vyššie definovaných transformácií môžeme úlohu (1.9) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{z}_1 + \mathbb{E} \sum_{t=2}^T \mathbf{c}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]})^\top \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{z}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{T}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{z}_{t-1}(\boldsymbol{\xi}_{[t-1]}) + \mathbf{W}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = \mathbf{b}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T \\ & \mathbf{z}_1 \geq 0, \mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) \geq 0 \quad \text{s.i., } t = 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde $\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\xi}_{[t]}) = (z_{t1}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}), \dots, z_{tt}(\boldsymbol{\xi}_{[t]}))$ je vektor dimenzie $n_1 + \dots + n_t$. Všimnime si, že v obmedzeniach v stupni $t = 2, \dots, T$ závisí rozhodnutie \mathbf{z}_t len na rozhodnutí \mathbf{z}_{t-1} , nie na celej histórii $\mathbf{z}_{[t]}$. Vzhľadom na zložitosť všeobecného zápisu danej transformácie uvedieme príklad pre počet stupňov $T = 4$, ktorý prevezmeme z knihy Kall a Mayer (2005). Pre väčšiu prehľadnosť vynecháme zo značenia závislosť na náhodnom vektore $\boldsymbol{\xi}_{[t]}$.

Príklad. Úloha štvorstupňového stochastického lineárneho programovania v tvare (1.9) má množinu obmedzení

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32} \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33} \mathbf{x}_3 &= \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{A}_{41} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{42} \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{43} \mathbf{x}_3 + \mathbf{A}_{44} \mathbf{x}_4 &= \mathbf{b}_4 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Po transformácii na úlohu (1.10) budú obmedzenia v tvare

$\mathbf{A}_{11} \mathbf{z}_{11}$				$= \mathbf{b}_1$
$\mathbf{A}_{21} \mathbf{z}_{11}$	$+\mathbf{A}_{22} \mathbf{z}_{2,2}$			$= \mathbf{b}_2$
\mathbf{z}_{11}	$-\mathbf{z}_{21}$			$= \mathbf{0}$
	$\mathbf{A}_{31} \mathbf{z}_{21} + \mathbf{A}_{32} \mathbf{z}_{22}$	$+\mathbf{A}_{33} \mathbf{z}_{33}$		$= \mathbf{b}_3$
	\mathbf{z}_{21}	$-\mathbf{z}_{31}$		$= \mathbf{0}$
		$-\mathbf{z}_{32}$		$= \mathbf{0}$
		$\mathbf{A}_{41} \mathbf{z}_{31} + \mathbf{A}_{42} \mathbf{z}_{32} + \mathbf{A}_{43} \mathbf{z}_{33}$	$+\mathbf{A}_{44} \mathbf{z}_{44}$	$= \mathbf{b}_4$

Po rozpísaní je vidieť, ktoré časti vektoru $\mathbf{z}_{[t]} = (z_{11}, \dots, z_{tt})$ slúžia na prenese-
nie riešenia do ďalšieho stupňa a ktoré korešpondujú s pôvodným rozhodovacím
vektorom \mathbf{x}_t .

Poznámka. Špeciálnym prípadom úlohy viacstupňového stochastického lineár-
neho programovania je úloha, v ktorej má náhodný proces $\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_T\}$ konečné
diskrétné rozdelenie. Vzhľadom na dôležitosť tohto prípadu v kontexte našej práce
ho rozoberieme v samostatnej kapitole.

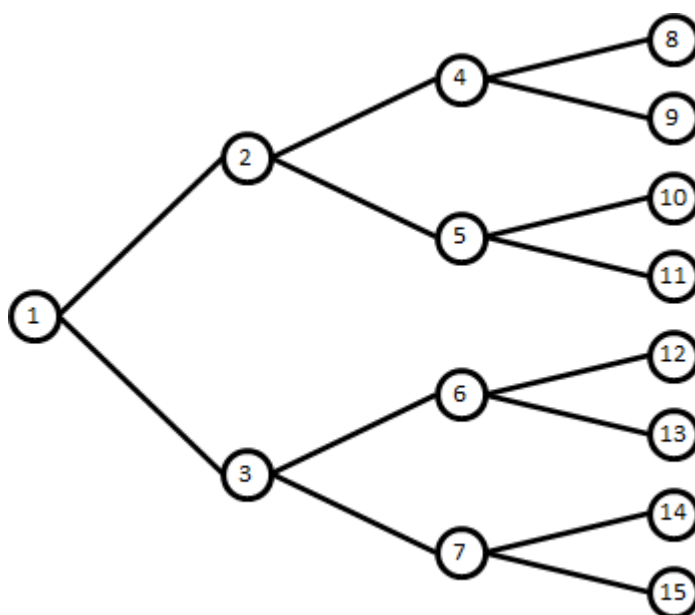
2. Konečné diskkrétne rozdelenie

V tejto kapitole sa budeme venovať špeciálnemu prípadu úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania, v ktorom má náhodný proces $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ konečné diskkrétne rozdelenie. Na reprezentáciu náhodného procesu použijeme scenárový strom, ktorý môže byť všeobecný, po stupňoch nezávislý, prípadne závislý od stavu markovského reťazca. Ďalej môžeme použiť scenárovú mriežku. V nasledujúcej časti popíšeme základné vlastnosti jednotlivých scenárových štruktúr a sformulujeme optimalizačnú úlohu. Nakoniec definujeme problém privátneho investora ako úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskkrétnym rozdelením.

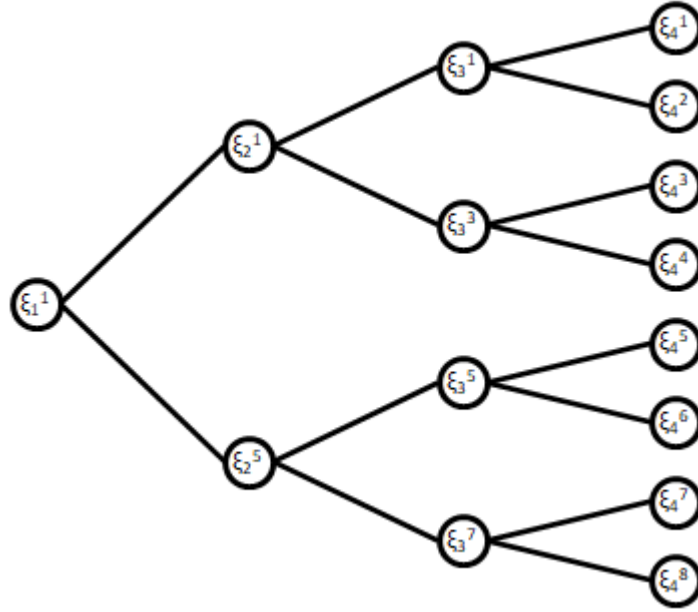
V celej kapitole predpokladáme, že pre $K \in \mathbb{N}$ je $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ náhodný proces s konečným diskkrétnym rozdelením s realizáciami ξ^1, \dots, ξ^K a pravdepodobnosťami realizácie q_1, \dots, q_K . Pre $k \in \{1, \dots, K\}$ budeme nazývať realizáciu náhodného procesu $\xi^k = \{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ *scenár* náhodného procesu a pravdepodobnosť q_k pravdepodobnosť scenára. Predpokladáme, že pre pravdepodobnosť scenára platí $q_k = P(\xi = \xi^k) > 0$, pre $k = 1, \dots, K$.

2.1 Scenárový strom

Základnou formou reprezentácie náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ s konečným diskkrétnym rozdelením je reprezentácia pomocou *scenárového stromu*. V tejto časti popíšeme konštrukciu scenárového stromu, pričom budeme vychádzať z konštrukcie uvedenej v knihe [Kall a Mayer \(2005\)](#). Po definovaní a popise scenárového stromu formulujeme úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania pre konečné diskkrétne rozdelenie, pričom budeme vychádzať z formulácií z predchádzajúcej kapitoly.



Obr. 2.1: Uzly v scenárovom strome.



Obr. 2.2: Realizácie v scenárovom strome.

Scenárový strom má uzly zoskupené do stupňov $t = 1, \dots, T$. Uzly budeme číslvať pomocou prirodzených čísel, ako je uvedené na obrázku 2.1. Množinu všetkých uzlov označíme $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}$. Pre uzol $u \in \mathcal{U}$ označíme $t_u \in \{1, \dots, T\}$ stupeň, v ktorom sa uzol u nachádza. Štruktúru všeobecného scenárového stromu v jednotlivých stupňoch popíšeme v nasledujúcich bodoch:

- V prvom stupni má scenárový strom jediný uzol $u = 1$ (obrázok 2.1), nazývaný *koreň*, ktorý reprezentuje vopred známu realizáciu náhodného vektora ξ_1 , rovnakú pre každý scenár $k = 1, \dots, K$. (obrázok 2.2).
- V druhom stupni má scenárový strom $\kappa_2 \geq 1$ uzlov $u = 2, \dots, 1 + \kappa_2 =: K_2$, reprezentujúcich κ_2 rôznych realizácií náhodného vektora ξ_2 v rámci náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$.

Príklad. Na obrázku 2.1 je $\kappa_2 = 2$ a $K_2 = 3$.

Ku každému uzlu v druhom stupni existuje aspoň jeden scenár, ktorý ním prechádza a zároveň každý scenár prechádza v druhom stupni práve jedným uzlom. Pripomíname, že pod scenárom myslíme realizáciu náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ a značíme ho $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$, pre $k = 1, \dots, K$. Hovoríme, že scenár $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ prechádza uzlom u v druhom stupni, ak uzol u reprezentuje hodnotu vektora ξ_2^k .

Príklad. Na obrázku 2.2 je znázornený scenárový strom reprezentujúci osem rôznych scenárov náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_4\}$. V druhom stupni má náhodný vektor ξ_2 dve rôzne realizácie reprezentované uzlami 2 a 3. Prvé štyri scenáre majú v druhom stupni rovnakú hodnotu $\xi_2^1 = \dots = \xi_2^4$. Aj druhé štyri scenáre majú v druhom stupni rovnakú hodnotu $\xi_2^5 = \dots = \xi_2^8$.

Za k_u vezmeme najmenšie $k \in \{1, \dots, K\}$, pre ktoré je vektor ξ_2^k reprezentovaný uzlom u .

Príklad. Uzlom $u = 2$ zo stromu z obrázkov 2.1 a 2.2 prechádzajú štyri scenáre, kde najmenší index z týchto scenárov je jedna, preto $k_2 = 1$. Uzlom $u = 3$ tiež prechádzajú štyri scenáre, najmenší index z týchto scenárov je päť, preto $k_3 = 5$.

Cestu scenárovým stromom z koreňa do uzla u v druhom stupni budeme v scenárovom strome znázorňovať spojením koreňa a uzlu u hranou. Cesta reprezentuje vektor $\xi_{[2]}^{k_u}$.

Príklad. V strome z obrázkov 2.1 a 2.2 reprezentuje cesta z koreňa do uzlu $u = 2$ históriu $\xi_{[2]}^1$ a cesta do uzlu $u = 3$ reprezentuje históriu $\xi_{[2]}^5$.

Hovoríme, že koreň je *rodič*, alebo *predchodca* uzlov v druhom stupni a uzly v druhom stupni sú *potomkovia*, alebo *nasledovníci* koreňa.

- Všeobecne platí, že v stupňoch $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom $\kappa_t \geq 1$ uzlov $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_{t-1} + \kappa_t$, $K_1 = 1$, reprezentujúcich vektory ξ_t^k v rámci rôznych realizácií histórie náhodného procesu $\xi_{[t]}^k$ do času t . To znamená, že zo všetkých scenárov $(\xi_1^k, \dots, \xi_T^k)$, $k = 1, \dots, K$ má κ_t scenárov rôznu históriu $\xi_{[t]}^k$ do stupňa t . Uzly v stupni t reprezentujú t -tu zložku ξ_t^k histórie $\xi_{[t]}^k$. Cestu scenárovým stromom od koreňa do uzla u v t -tom stupni reprezentujúcu históriu $\xi_{[t]}^{k_u}$, $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_t$ budeme v scenárovom strome znázorňovať spojením uzlov v jednotlivých stupňoch reprezentujúcich $\xi_{[t]}^{k_u}$ hranou. Za k_u opäť vezmeme najmenšie $k \in \{1, \dots, K\}$, pre ktoré je ξ_t^k reprezentované uzlom u . Všeobecne, každý uzol v t -tom stupni, $t = 2, \dots, T$, má práve jedného predchodcu a každý uzol v stupni $t = 1, \dots, T - 1$ má aspoň jedného nasledovníka.
- Uzly $u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T$ v poslednom stupni T sa nazývajú listy. Každý scenár $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$, $k = 1, \dots, K$ je v scenárovom strome reprezentovaný cestou z koreňa stromu k listu. Z konštrukcie scenárového stromu vyplýva, že počet scenárov je rovný počtu listov v scenárovom strome.

Pre každý uzol $u \in \mathcal{U}$ označme

$$\mathcal{K}_u = \{k \in K : \xi_{t_u}^k = \xi_{t_u}^{k_u}\}$$

množinu indexov všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u .

Príklad. Pre uzol $u = 2$ v strome z obrázkov 2.1 a 2.2 je $\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ a pre uzol $u = 3$ je $\mathcal{K}_3 = \{5, 6, 7, 8\}$.

Každým uzlom v scenárovom strome prechádza aspoň jeden scenár, tzn. $\forall u \in \mathcal{U}$ je $\mathcal{K}_u \neq \emptyset$. Z konštrukcie vyššie vyplýva, že $\mathcal{U} = \{1, \dots, K_T\}$. Nech $\mathcal{U}_t \subset \mathbb{N}$ je množina všetkých uzlov v stupni t . Potom $|\mathcal{U}_t| = \kappa_t$. Každý scenár prechádza v stupni $t \in \{1, \dots, T\}$ práve jedným uzlom u , tzn. $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ platí, že $\cup_{u \in \mathcal{U}_t} \mathcal{K}_u = K$ a zároveň $\forall u, v \in \mathcal{U}_t, u \neq v$ platí $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v = \emptyset$.

Pre uzol $u \in \{1, \dots, K_{T-1}\}$ označíme množinu všetkých potomkov, respektíve bezprostredných nasledovníkov uzlu u ako

$$\mathcal{N}_u = \{v \in \{K_{t_u} + 1, \dots, K_{t_u+1}\} : k_v \in \mathcal{K}_u\}.$$

Množina \mathcal{N}_u zahŕňa len bezprostredných nasledovníkov v stupni $t_u + 1$.

Príklad. Pre uzol $u = 2$ zo stromu z obrázkov 2.1 a 2.2 je $\mathcal{N}_2 = \{4, 5\}$ a pre uzol $u = 3$ je $\mathcal{N}_3 = \{6, 7\}$.

Pre uzol $u \in \{2, \dots, K_T\}$ označíme množinu všetkých predchodcov uzlu u ako

$$\mathcal{P}_u = \{v \in \{1, \dots, K_{t_u}\} : \xi_{[t_v]}^{k_v} = \xi_{[t_u]}^{k_u}\}.$$

Množina \mathcal{P}_u nezahŕňa len bezprostredných predchodcov v stupni $t_u - 1$, ale všetkých predchodcov v predchádzajúcich stupňoch. Ďalej si môžeme všimnúť, že v množine \mathcal{P}_u je aj samotný uzol u , a to kvôli jej neskoršiemu použitiu vo formulácii optimalizačnej úlohy.

Príklad. Pre uzol $u = 9$ zo stromu z obrázku 2.1 je $\mathcal{P}_9 = \{1, 2, 4, 9\}$.

K vyššie skonštruovanému scenárovému stromu doplníme informáciu o pravdepodobnostnom rozdelení. Opäť definíciu rozdelíme do niekoľkých bodov:

- V stupni T reprezentuje každý uzol $u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T$ T -tu zložku $\xi_T^{k_u}$ práve jedného scenára $\{\xi_1^{k_u}, \dots, \xi_T^{k_u}\}$. Keďže sa počet scenárov rovná počtu listov, platí, že $K = \kappa_T$. Pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u stotožníme s pravdepodobnosťou q_{k_u} realizácie scenára $\{\xi_1^{k_u}, \dots, \xi_T^{k_u}\}$. Z číslovania uzlov v scenárovom strome (obrázok 2.2) vyplýva, že $k_u = u - K_{T-1}$. Potom definujeme pravdepodobnosť dosiahnutia uzla $u \in \{K_{T-1} + 1, \dots, K_T\}$ ako

$$p_u = q_{u-K_{T-1}} > 0.$$

- Všeobecne pre stupeň $t = 1, \dots, T$ definujeme pre uzly $u = 1, \dots, K_T$ pravdepodobnosť p_u dosiahnutia uzla u nasledovne. Nech \mathcal{K}_u je množina indexov všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u . Potom definujeme pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u ako

$$p_u = \sum_{k \in \mathcal{K}_u} q_k > 0.$$

Poznámka. Pre každý stupeň $t = 1, \dots, T$ platí, že $\sum_{u \in \mathcal{U}_t} p_u = 1$.

Pravdepodobnosť dosiahnutia uzla u je teda súčet pravdepodobností všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u . Množina $\{\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\} : k \in \mathcal{K}_u\}$ všetkých scenárov prechádzajúcich uzlom u sa v literatúre zvykne nazývať *scenárový zväzok* uzla u (Kall a Mayer (2005)).

- Pre stupne $t = 1, \dots, T - 1$ definujeme *pravdepodobnosť prechodu* z uzla $u \in \{1, \dots, K_{T-1}\}$ do uzla $v \in \mathcal{N}_u$ ako podmienenú pravdepodobnosť dosiahnutia uzla v pre daný uzol u , tzn.

$$p_{uv} = \frac{p_v}{p_u}.$$

Poznámka. Pomocou pravdepodobností prechodu môžeme vyjadriť pravdepodobnosť q_k scenára $\{\xi_1^k, \dots, \xi_T^k\}$ reprezentovaného množinou uzlov $\{u_1, \dots, u_T\}$ ako

$$q_k = p_{u_1 u_2} p_{u_2 u_3} \dots p_{u_{T-1} u_T}.$$

Po definovaní a konštrukcii scenárového stromu môžeme prejsť k formulácii viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskretným rozdelením, pričom budeme vychádzať z predpokladov úlohy (1.9). Pre každý uzol $u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ označme $\mathbf{x}_u := \mathbf{x}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$. Potom úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným diskretným rozdelením môžeme formulovať v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}} p_u \mathbf{c}_u^\top (\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_u \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{t_u 1}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_1 + \sum_{v \in \mathcal{P}_u \setminus \{1\}} \mathbf{A}_{t_u t_v}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \mathbf{x}_v = \mathbf{b}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u}) \quad \forall u \in \mathcal{U} \setminus \{1\} \\ & \mathbf{x}_u \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Tvar úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania (2.1) sa tiež nazýva *kompaktný* tvar, alebo *implicitný* tvar, pretože požiadavok neanticipativity je zaistený implicitne, priradením rozhodovacích premenných k uzlom scenárového stromu (Kall a Mayer (2005)).

Ďalší spôsob formulácie pozostáva v priradení rozhodovacích premenných k celým scenárom a explicitným požadovaním neanticipativity pomocou obmedzení. Takýto tvar sa nazýva *explicitný* tvar úlohy viacstupňového stochastického lineárneho programovania.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K q_k \left(\mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1^k + \sum_{t=2}^T \mathbf{c}_t^k \mathbf{x}_t^k \right) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1^k = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{t1}^k \mathbf{x}_1^k + \sum_{\tau=2}^t \mathbf{A}_{t\tau}^k \mathbf{x}_\tau^k = \mathbf{b}_t^k, \quad t = 2, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K \\ & \mathbf{x}_t^k \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K \\ & \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^{k_u} \quad t = 1, \dots, T, \quad k \in K_u, u \in \mathcal{U}_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Iný častý spôsob formulácie optimalizačnej úlohy je schodiskový tvar vychádzajúci z tvaru (1.10). Pre zjednodušenie značenia zadefinujeme $\mathbf{T}_u := \mathbf{T}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{W}_u := \mathbf{W}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{x}_u := \mathbf{x}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$, $\mathbf{b}_u := \mathbf{b}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$ a $\mathbf{c}_u := \mathbf{c}_{t_u}(\boldsymbol{\xi}_{[t_u]}^{k_u})$. Potom úlohu viacstupňového stochastického lineárneho programovania s konečným počtom scenárov môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u \in \mathcal{U} \setminus \{1\}} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u \in \mathcal{U} \setminus \{1\} \\ & \mathbf{x}_u \geq 0, \quad u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $h_u \in \mathcal{P}_u$ je rodič, respektíve bezprostredný predchodca uzla u , tzn. $t_{h_u} = t_u - 1$.

Často sa úloha (2.3) rozpisuje do jednotlivých stupňov:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u=2}^{K_2} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \sum_{u=K_2+1}^{K_3} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \cdots + \sum_{u=K_{T-1}+1}^{K_T} p_u \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_1 + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = 2, \dots, K_2 \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = K_2 + 1, \dots, K_3 \\
& \vdots \\
& \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} + \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u, \quad u = K_{T-1} + 1, \dots, K_T \\
& \mathbf{x}_u \geq 0, \quad u = 1, \dots, K_T
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ďalší prístup k zápisu úlohy viacstupňového stochastického programovania je rekurzívny zápis pomocou sústavy rovníc.

V stupni T definujeme pre uzly $u \in \{K_{T-1}+1, \dots, K_T\}$ úlohu matematického programovania

$$\begin{aligned}
Q_u(\mathbf{x}_{h_u}) = \min \quad & \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u - \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Optimálna hodnota závisí na predchodcovi \mathbf{x}_{h_u} .

V stupňoch $t = 2, \dots, T-1$ definujeme pre uzly $u \in \{K_{t-1}+1, \dots, K_t\}$ úlohu matematického programovania v tvare

$$\begin{aligned}
Q_u(\mathbf{x}_{h_u}) = \min \quad & \mathbf{c}_u^\top \mathbf{x}_u + \sum_{v \in \mathcal{N}_u} p_{uv} Q_v(\mathbf{x}_u) \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{b}_u - \mathbf{T}_u \mathbf{x}_{h_u} \\
& \mathbf{x}_u \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nakoniec v prvom stupni definujeme pre koreň úlohu

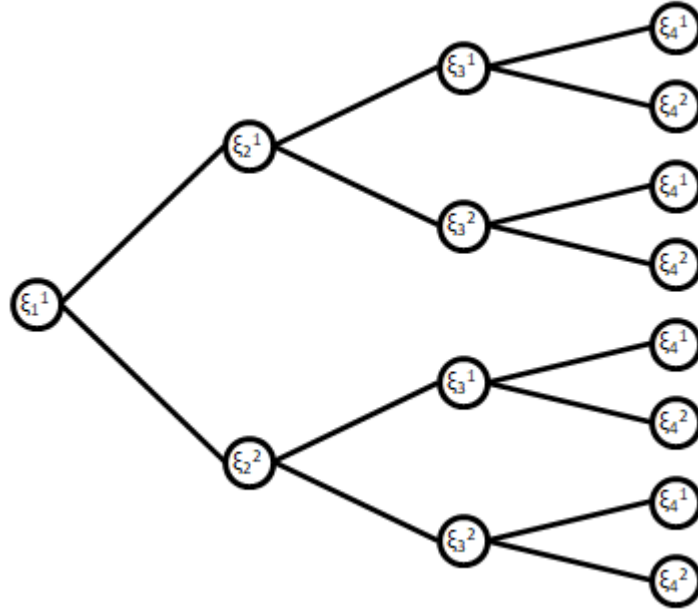
$$\begin{aligned}
Q_1 = \min \quad & \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \sum_{u=2}^{K_2} p_u Q_u(\mathbf{x}_1) \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{W}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\
& \mathbf{x}_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.1 Po stupňoch nezávislý scenárový strom

Špeciálnym prípadom scenárového stromu je scenárový strom reprezentujúci *po stupňoch nezávislý* náhodný proces. Hovoríme, že $\{\xi_t, t = 1, \dots, T\}$ je po stupňoch nezávislý náhodný proces, pokiaľ náhodný vektor ξ_t je stochasticky nezávislý na $\xi_{[t-1]}$ pre $t = 2, \dots, T$. Príklad po stupňoch nezávislého scenárového stromu je uvedený na obrázku 2.3. Horný index je tentokrát index realizácií náhodných vektorov ξ_t v jednotlivých stupňoch t , na rozdiel od obrázku 2.2, kde ide o index prvého scenára prechádzajúceho daným uzlom.

Štruktúra po stupňoch nezávislého scenárového stromu v jednotlivých stupňoch vyzerá nasledovne:

- V prvom stupni má scenárový strom jediný uzol $u = 1$, nazývaný *koreň*, ktorý reprezentuje vopred známu realizáciu náhodného vektoru ξ_1 .



Obr. 2.3: Po stupňoch nezávislý scenárový strom.

- V druhom stupni má scenárový strom κ_2 uzlov $u = 2, \dots, 1 + \kappa_2 =: K_2$, kde $\kappa_2 \geq 1$. Uzly v druhom stupni reprezentujú rôzne realizácie náhodného vektoru ξ_2 a ide o uzly z množiny \mathcal{N}_1 bezprostredných následníkov koreňa stromu.
- Všeobecne platí, že v stupňoch $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom uzly $u = K_{t-1} + 1, \dots, K_{t-1} + \kappa_t =: K_t$, kde $\kappa_t \geq 1$. Každý uzol v t -tom stupni patrí do práve jednej množiny \mathcal{N}_u nasledovníkov uzlov $u = K_{t-2} + 1, \dots, K_{t-1}$ zo stupňa $t - 1$. Pre po stupňoch nezávislý strom platí, že každá množina nasledovníkov \mathcal{N}_u v stupni t uzlov u z predchádzajúceho stupňa $t - 1$ reprezentuje rovnakú množinu realizácií náhodného vektoru ξ_t v stupni t . Z toho vyplýva, že množiny nasledovníkov \mathcal{N}_u v stupni t obsahujú rovnaký počet uzlov k_t . Celkový počet uzlov κ_t v stupni t dostaneme ako súčin počtu uzlov v predchádzajúcom stupni $t - 1$ a počtu potomkov v stupni t , tzn. $\kappa_t = \kappa_{t-1}k_t$, $t = 2, \dots, T$.

2.2 Kombinácia s makovským reťazcom

V tejto časti popíšeme špeciálny prípad scenárového stromu, reprezentujúceho náhodný proces, ktorý závisí od stavu markovského reťazca. Pri popise vlastností takéhoto stromu budeme vychádzať z článku [Philpott a De Matos \(2012\)](#).

Nech náhodný proces $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$ je *markovský reťazec* s diskretným časom a diskretnou množinou stavov.

Poznámka. ([Shapiro a kol. \(2009\)](#))

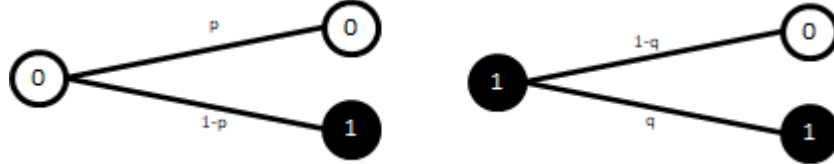
Hovoríme, že náhodný proces $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$ je markovský reťazec, ak pre každé $t = 2, \dots, T$ je pravdepodobnostné rozdelenie ζ_t , podmienené $\zeta_{[t-1]}$, rovné pravdepodobnostnému rozdeleniu ζ_t , podmienenému ζ_{t-1} .

Nech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ je náhodný proces s konečným diskretným rozdelením,

ktorý závisí na markovskom reťazci $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_T\}$. Pre účely našej práce predpokladáme, že markovský reťazec môže v každom stupni $t = 1, \dots, T$ nadobúdať dva stavy, 0 a 1, s pravdepodobnosťami prechodu

$$\begin{aligned} P(\zeta_t = 0 | \zeta_{t-1} = 0) &= p & P(\zeta_t = 1 | \zeta_{t-1} = 1) &= q \\ P(\zeta_t = 1 | \zeta_{t-1} = 0) &= 1 - p & P(\zeta_t = 0 | \zeta_{t-1} = 1) &= 1 - q, \end{aligned}$$

ako je uvedené na obrázku 2.4.



Obr. 2.4: Stavy markovského reťazca.

Stav 0 je pre väčšiu prehľadnosť graficky znázornený bielou farbou, stav 1 čiernou farbou, p je pravdepodobnosť zotrvania v stave 0, q je pravdepodobnosť zotrvania v stave 1, $1 - p$ je pravdepodobnosť prechodu zo stavu 0 do stavu 1 a $1 - q$ je pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu 0.

Štruktúra takto kombinovaného scenárového stromu v jednotlivých stupňoch vyzerá nasledovne (obrázok 2.5):

- V prvom stupni má kombinovaný scenárový strom jediný uzol $u = 1$, ktorý reprezentuje známy stav markovského reťazca ζ_1 a známu hodnotu vektora ξ_1 v stave ζ_1 .
- V druhom stupni môže markovský reťazec nadobúdať dve rôzne realizácie, stav 0 a stav 1. V stave 0 má scenárový strom $\kappa_2^0 \geq 1$ uzlov. Počet uzlov κ_2^0 korešponduje s počtom navzájom rôznych realizácií náhodného vektora ξ_2 v druhom stupni v stave markovského reťazca 0. V stave 1 má scenárový strom $\kappa_2^1 \geq 1$ uzlov. Počet uzlov κ_2^1 korešponduje s počtom navzájom rôznych realizácií náhodného vektora ξ_2 v druhom stupni v stave markovského reťazca 1.
- Všeobecne, v stupni $t = 2, \dots, T$ má scenárový strom v závislosti na stave markovského reťazca a histórii náhodného procesu $\xi_{[t-1]}$ $\kappa_t^0 \geq 1$ uzlov reprezentujúcich navzájom rôzne realizácie náhodného vektora ξ_t v stave markovského reťazca 0 a $\kappa_t^1 \geq 1$ uzlov reprezentujúcich navzájom rôzne realizácie náhodného vektora ξ_t v stave markovského reťazca 1.

Týmto spôsobom definujeme uzly v stupni $t = 2, \dots, T$ pre každú realizáciu markovského reťazca ζ_t a históriu náhodného procesu $\xi_{[t-1]}$. Pravdepodobnosti prechodu p_{uv} z uzla u v stupni $t - 1$ do uzla v v stupni t prenášobíme pravdepodobnosťami prechodu markovského reťazca, v závislosti na tom, aký stav markovského reťazca reprezentuje uzol u a aký stav markovského reťazca reprezentuje uzol v .

2.3 Scenárová mriežka

Ďalšou scenárovou štruktúrou používanou na reprezentáciu diskkrétnej aproximácie náhodného procesu je scenárová mriežka. Konštrukciu si ukážeme na príklade binomickej scenárovej mriežky.

Binomické scenárové mriežky reprezentujú širokú triedu modelov s diskrétnym časom, ktoré sa v literatúre často využívajú na modelovanie ceny štátnych dlhopisov (opcií na štátne dlhopisy), ktorých hodnota v čase závisí od krátkodobých úrokových mier. Ako príklad môžeme uviesť dvojročný bezkupónový dlhopis, ktorého cenu po jednom roku získame diskontovaním očakávanej ceny po dvoch rokoch s využitím krátkodobej úrokovej miery známej po jednom roku. Súčasnú cenu dlhopisu získame diskontovaním ceny po jednom roku súčasnou úrokovou mierou. Konštrukcia binomickej scenárovej mriežky pre takýto typ úloh je popísaná napríklad v článku Black a kol. (1990), alebo v knihe Dupačová a kol. (2002), ktorej budeme vychádzať pri definovaní štruktúry binomickej scenárovej mriežky na reprezentáciu náhodných výnosov. Príklad binomickej scenárovej mriežky je uvedený na obrázku 2.6.

Nech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_T\}$ je náhodný proces výnosov, pre ktorého vektory ξ_t v každom čase $t = 1, \dots, T$ platí vzťah

$$\xi_t^k = \xi_{t0} k_t^{i_t(k)}. \quad (2.8)$$

ξ_{t0} je realizácia náhodného vektoru ξ_t , pokiaľ od prvého stupňa až po stupeň t nastali iba prechody výnosu smerom nadol, k_t je multiplikatívny koeficient, určujúci nárast výnosu v stupni t oproti ξ_{t0} a

$$i_t(k) = \sum_{\tau=1}^t \zeta_{\tau}^k,$$

kde $\zeta_1^k = 0$ pre každé $k = 1, \dots, 2^{T-1}$ a pre $t = 2, \dots, T$ môže ζ_t^k nadobúdať buď hodnotu 0 alebo 1. Hodnota 1 v stupni $t = 2, \dots, T$ značí, že proces prešiel zo stupňa $t-1$ do stupňa t nahor a hodnota 0 značí, že náhodný proces prešiel zo stupňa $t-1$ do stupňa t nadol. Dokopy teda môže nastať 2^{T-1} scenárov náhodného procesu $\{\xi_1, \dots, \xi_T\}$.

Dôležitou vlastnosťou, ktorá odlišuje scenárovú mriežku od klasického scenárového stromu, je *rekombinačná vlastnosť* scenárovej mriežky. Hovoríme, že binomická scenárová mriežka má rekombinačnú vlastnosť, ak rovnaký počet prechodov nahor, respektíve nadol vedie bez ohľadu na ich poradie k rovnakému stavu náhodného procesu.

Príklad. Do uzla $u = 5$ z obrázku 2.7 sa dostaneme z koreňa prechodom nahor do uzla 2 a nadol do uzla 5, alebo prechodom nadol do uzla 3 a nahor do uzla 5.

Všimnime si, že scenárová mriežka zostrojená pomocou vzťahu (2.8) splňuje rekombinačnú vlastnosť, pretože v každom stupni $t = 2, \dots, T$ nás zaujíma iba počet prechodov nahor (respektíve nadol) do času t a nezáleží nám na poradí daných prechodov. Vďaka rekombinačnej vlastnosti binomické scenárové mriežky oproti scenárovému stromu znižujú počet uzlov v každom stupni a tým aj veľkosť optimalizačného problému. Na druhej strane, narozdiel od scenárového stromu, scenárová mriežka nenesie informáciu o histórii náhodného procesu.

2.4 Investičný problém

V predchádzajúcej časti sme si predstavili rôzne matematické zápisy úlohy matematického programovania. V tejto sekcii definujeme problém privátneho investora, ktorý budeme riešiť a sformulujeme optimalizačnú úlohu. Pri formulácii optimalizačnej úlohy vychádzame z knihy [Birge a Louveaux (2011)], z článku [Gülpinar a kol. (2003)] a z prác [Malá (2014)] a [Laurent (2006)].

2.4.1 Problém privátneho investora

Predstavme si, že za časové obdobie dĺžky $T \in \mathbb{N}$ budeme potrebovať finančnú čiastku $G > 0$. Rozhodneme sa preto investovať čiastku $0 < B < G$ do $n \in \mathbb{N}$ akcií rôznych spoločností $i = 1, \dots, n$ a vybudovať si tak vlastné portfólio, ktoré v čase T predáme, s cieľom získať aspoň potrebnú čiastku G . Časové obdobie dĺžky T rozdelíme do stupňov $t = 1, \dots, T$.

V prvom stupni nakúpime n rôznych akcií v hodnote $x_{1,i}$, $i = 1, \dots, n$. V rámci diverzifikácie portfólia si môžeme ako investor určiť hornú hranicu $\overline{x_{1,i}}$, prípadne dolnú hranicu $\underline{x_{1,i}}$ investovaného majetku do akcií spoločnosti i . Zároveň nepovoľujeme predaj nakrátko, čo vyjadríme obmedzením

$$0 \leq \underline{x_{1,i}} \leq x_{1,i} \leq \overline{x_{1,i}}.$$

Za nákup aktíva i zaplatíme burzovému maklérovi transakčný poplatok vo výške $c_b \in (0, 1)$ z ceny $x_{1,i}$. Predpokladáme, že na nákup akcií a transakčné poplatky minieme celý počiatočný kapitál, čo vyjadríme vzťahom

$$\sum_{i=1}^n x_{1,i}(1 + c_b) = B. \quad (2.9)$$

Rovnica (2.9) vyjadruje, že za čiastku B si vytvoríme portfólio akcií n spoločností v celkovej hodnote $\frac{B}{1+c_b}$.

V stupňoch $t = 2, \dots, T-1$ môžeme naše portfólio preusporiadať, v závislosti na vývoji hodnoty akcií spoločností $i = 1, \dots, n$. Nech $\xi_{t,i}$, $t = 2$ je náhodný výnos z držania akcií spoločnosti i v stupni t . V každom stupni sa nám odkryje vývoj budúcich výnosov, na základe čoho sa rozhodneme, či dokúpime akcie spoločnosti i v hodnote $b_{t,i}$, alebo predáme časť akcií, alebo všetky akcie spoločnosti i v hodnote $s_{t,i}$ a získané prostriedky investujeme do nákupu akcií jednej, alebo viacerých iných spoločností.

Rovnako ako v prípade nákupu, aj pri predaji akcií platíme burzovému maklérovi čiastku $c_s \in (0, 1)$ z hodnoty predaných akcií. Po úprave portfólia bude hodnota akcií spoločnosti i v stupni t a pre scenár k v tvare

$$x_{t,i}^k = \xi_{t,i}^k x_{t-1,i}^k + (1 - c_b)b_{t,i}^k - (1 + c_s)s_{t,i}^k. \quad (2.10)$$

Vzťah (2.10) mimo iné hovorí, že za čiastku $b_{t,i}^k$ zvýšime hodnotu držaných akcií spoločnosti i o $(1 - c_b)b_{t,i}^k$, pričom v prvom stupni sme uvažovali, že za čiastku B vieme vytvoriť portfólio v hodnote $\frac{B}{1+c_b}$. Pre jednoduchosť optimalizačného modelu zanedbáme malé rozdiely medzi koeficientmi $\frac{1}{1+c_b}$ a $(1 - c_b)$, ktorými pre násobujeme čiastku určenú na kúpu akcií. Predpokladáme, že na úpravu portfólia

nemáme k dispozícii žiadne externé zdroje a že všetky peniaze získané predajom akcií znovu investujeme do nákupu iných akcií, tzn.

$$\sum_{i=1}^n b_{t,i}^k = \sum_{i=1}^n s_{t,i}^k.$$

Ako investor si môžeme určiť horné hranice $\overline{b_{t,i}^k}$ a $\overline{s_{t,i}^k}$, prípadne dolné hranice $\underline{b_{t,i}^k}$ a $\underline{s_{t,i}^k}$ na nákup a predaj akcií spoločnosti i v čase t . Opäť požadujeme nezápornosť, tzn.

$$0 \leq \underline{b_{t,i}^k} \leq b_{t,i}^k \leq \overline{b_{t,i}^k}$$

$$0 \leq \underline{s_{t,i}^k} \leq s_{t,i}^k \leq \overline{s_{t,i}^k}.$$

V čase T požadujeme, aby stredná hodnota portfólia bola aspoň G , čo vyjadríme vzťahom

$$(1 - c_s) \sum_{k=1}^K p_k \sum_{i=1}^n \xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k \geq G.$$

Podobne ako v prípade nákupu, aj v prípade predaja akcií budeme zanedbávať malé rozdiely medzi koeficientmi $\frac{1}{1-c_s}$ a $1 + c_s$, o ktoré upravujeme našu výslednú čiastku po predaji akcií.

2.4.2 Mean CVaR model

V každom časovom okamžiku, v ktorom robíme rozhodnutie o podobe nášho portfólia, budeme dbať na to, aby sme minimalizovali riziko spojené s naším rozhodnutím. Často používaná voľba miery rizika je *hodnota v riziku*.

Definícia 1. (Rockafellar a Uryasev (2002))

Nech L je náhodná veličina vyjadrujúca stratu portfólia, $\alpha \in (0, 1)$. Potom definujeme hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α ako

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}.$$

Za α sa väčšinou berie hodnota blízko 1, typicky 0,95. $VaR_\alpha(L)$ je teda ľavý α -kvantil rozdelenia náhodnej veličiny L . Hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α môžeme interpretovať ako najvyššiu možnú stratu portfólia s pravdepodobnosťou vyššou alebo rovnou α . Nevýhodou hodnoty v riziku ako miery rizika je, že jej použitie ako účelovej funkcie nevedie k úlohe konvexného programovania. Je totiž známe, že aj keď je L konvexná funkcia rozhodovacieho vektoru \mathbf{x} , hodnota v riziku $VaR_\alpha(L)$ nemusí byť konvexná v \mathbf{x} (Rockafellar a Uryasev (2002)). Z pohľadu investora má hodnota v riziku nevýhodu, že nedáva žiadnu informáciu o strate nad hodnotou $VaR_\alpha(L)$. V našom modeli použijeme preto *podmienenu hodnotu v riziku*.

Definícia 2. (Rockafellar a Uryasev (2002))

Nech L je náhodná veličina vyjadrujúca stratu portfólia, $\alpha \in (0, 1)$. Potom definujeme podmienenú hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α ako

$$CVaR_\alpha(L) = \inf\{a + \frac{1}{1-\alpha} E[\max(0, L - a)] : a \in \mathbb{R}\}.$$

Poznámka. Na základe článku [Rockafellar a Uryasev \(2002\)](#) môžeme CVaR ekvivalentne prepísať do tvaru

$$CVaR_\alpha(L) = \mathbb{E}[L | L > VaR_\alpha(L)].$$

Podmienenú hodnotu v riziku na hladine spoľahlivosti α môžeme interpretovať ako podmienenú strednú hodnotu straty portfólia, za podmienky, že je strata portfólia väčšia ako hodnota v riziku na hladine α .

Podmienená hodnota v riziku je príkladom *koherentnej* miery rizika ([Rockafellar a Uryasev \(2002\)](#)). Podľa článku [Artzner a kol. \(1999\)](#) je funkcia $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koherentná miera rizika, ak pre každé dve náhodné veličiny L_1, L_2 platí

- konvexnosť: $\rho(\alpha L_1 + (1 - \alpha)L_2) \leq \alpha \rho(L_1) + (1 - \alpha)\rho(L_2)$, pre $\alpha \in [0, 1]$,
- monotónnosť: ak $L_1(\omega) \leq L_2(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$, tak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$,
- pozitívna homogenita: ak $a \in \mathbb{R}$ a $a > 0$, tak $\rho(aL_1) = a\rho(L_1)$,
- translačná ekvivariancia: ak $a \in \mathbb{R}$, tak $\rho(a + L_1) = a + \rho(L_1)$.

Optimalizačnú úlohu s podmienenou hodnotou v riziku ako mierou rizika môžeme zapísať ako úlohu lineárneho programovania nahradením zložky

$$\max(0, L - a)$$

premennou z , o ktorej budeme predpokladať, že $z \geq 0$ s.i., $z \geq L - a$ s.i. Nájdením najmenšieho takého z dostaneme presne $\max(0, L - a)$.

V prvom stupni, kedy investujeme celý náš počiatočný majetok B do aktív $i = 1, \dots, n$, poznáme aktuálny výnos akcií spoločností $i = 1, \dots, n$, preto pri skladaní portfólia nepodstupujeme žiadne riziko spojené s nedostatkom informácií o ich výnose.

V stupňoch $t = 2, \dots, T - 1$ budeme požadovať minimalizovanie podmienenej hodnoty v riziku, kde za náhodnú stratu L_t budeme uvažovať

$$L_t = \sum_{i=1}^n (x_{t-1,i} - x_{t,i})$$

V čase T za náhodnú stratu L_t budeme uvažovať

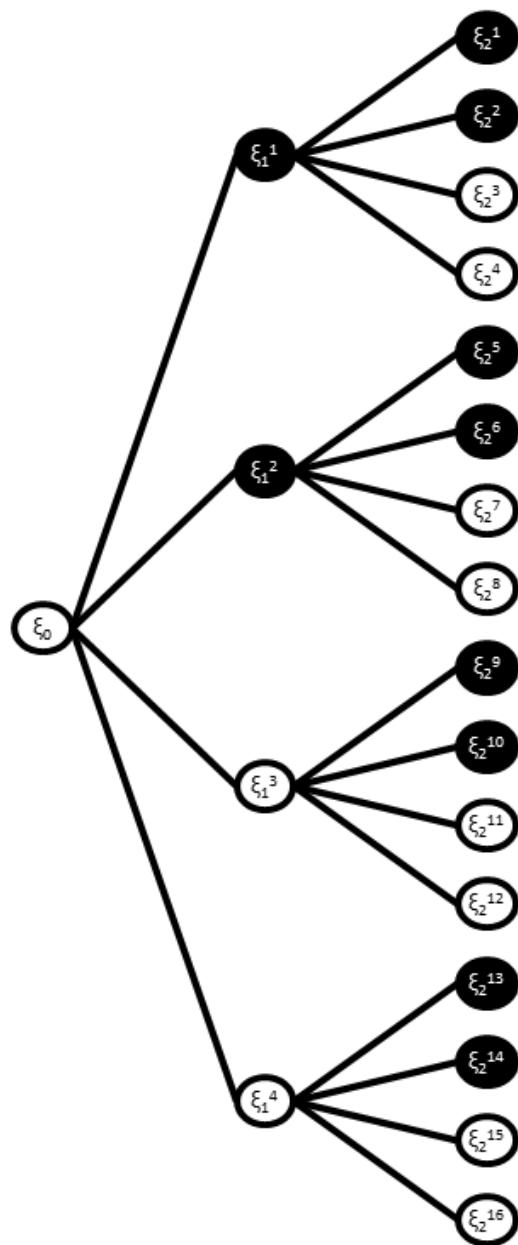
$$L_T = \sum_{i=1}^n (x_{T-1,i} - \xi_{T,i} x_{T-1,i} (1 - c_s))$$

Úloha optimalizácie portfólia pomocou CVaR bude v tvare

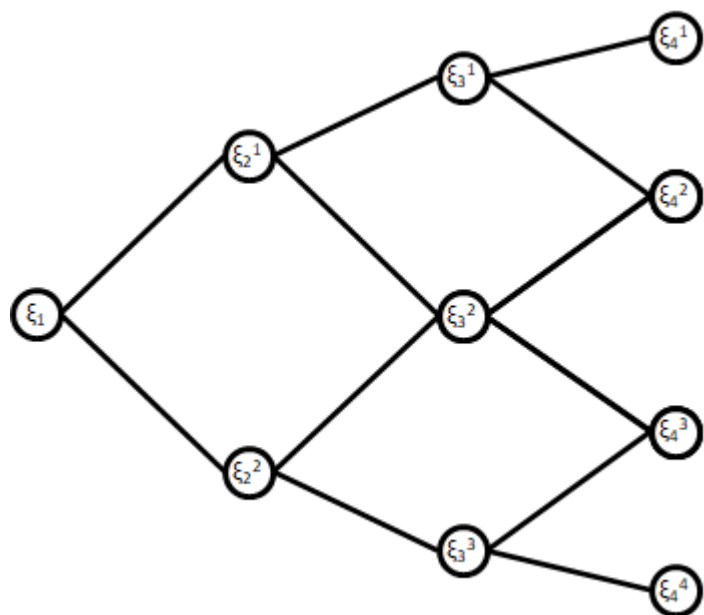
$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=2}^T \lambda_t \left(a_t + \frac{1}{1-\alpha_t} \sum_{k_t=1}^{K_t} p_t^{k_t} z_t^{k_t} \right) \\
\text{z.p.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{1,i} (1 + c_b) = B \\
& x_{t,i}^{k_t} = \xi_{t,i}^{k_t} x_{t-1,i}^{h_{k_t}} + (1 - c_b) b_{t,i}^{k_t} - (1 + c_s) s_{t,i}^{k_t}, & t &= 2, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& & i &= 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^n b_{t,i}^{k_t} = \sum_{i=1}^n s_{t,i}^{k_t}, & t &= 2, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& \sum_{k_T=1}^{K_T} p_T^{k_T} \sum_{i=1}^n \xi_{T,i}^{k_T} x_{T-1,i}^{h_{k_T}} (1 - c_s) \geq G, \\
& z_t^{k_t} \geq \sum_{i=1}^n (x_{t-1,i}^{h_{k_t}} - x_{t,i}^{k_t}) - a_t, & t &= 2, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& z_T^{k_T} \geq \sum_{i=1}^n (x_{T-1,i}^{h_{k_T}} - \xi_{T,i}^{k_T} x_{T-1,i}^{h_{k_T}} (1 - c_s)) - a_T, & k_T &= 1, \dots, K_T, \\
& z_t^{k_t} \geq 0, & t &= 2, \dots, T, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& x_{t,i}^{k_t} \geq 0, & t &= 2, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& & i &= 1, \dots, n, \\
& 0 \leq \underline{b}_{t,i}^{k_t} \leq b_{t,i}^{k_t} \leq \overline{b}_{t,i}^{k_t}, & t &= 1, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& & i &= 1, \dots, n, \\
& 0 \leq \underline{s}_{t,i}^k \leq s_{t,i}^k \leq \overline{s}_{t,i}^k, & t &= 2, \dots, T-1, \\
& & k_t &= 1, \dots, K_t, \\
& & i &= 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

kde h_{k_t} je realizácia náhodného výnosu v stupni $t-1$, ktorá predchádza realizácii k_t v stupni t , v zmysle bezprostredného predchodcu definovaného pre scenárové stromy. Váhy $\lambda_t \geq 0$ určujú, nakoľko je pre nás ako investora dôležitá podmienená hodnota v riziku $CVaR_\alpha$ pre každé obdobie $t \in \{1, \dots, T\}$.

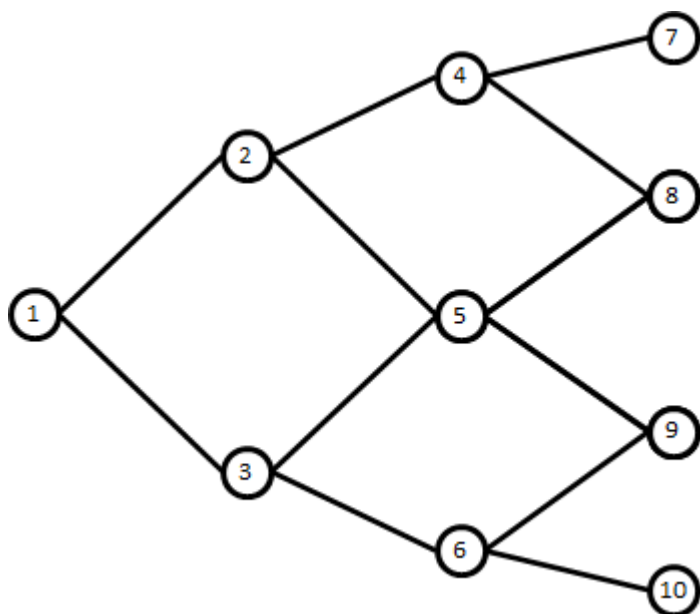
V rámci zachovania princípu neanticipativity požadujeme, aby optimálne riešenie \mathbf{x}_t v stupni $t \in 1, \dots, T$ záviselo len na histórii náhodného procesu do času t a nie na budúcich pozorovaniach. Ak veríme nášmu modelu, na základe stavu v stupni t vieme, ktoré scenáre už nemôžu v budúcnosti z daného stavu nastať. Na základe článku [Shapiro \(2009\)](#) hovoríme, že úloha viacstupňového stochastického programovania je *časovo konzistentná*, ak v každom stupni optimálne riešenie nezávisí na scenároch, ktoré sa už nemôžu v budúcnosti uskutočniť. Na úlohu [\(2.11\)](#) môžeme pozeráť ako na úlohu viacstupňového stochastického programovania s premennými $\mathbf{x}_1, a_2, \dots, a_T$ v prvom stupni. To znamená, že ich optimálne hodnoty závisia na všetkých scenároch začínajúcich od koreňa a teda v neskorších stupňoch aj na scenároch, ktoré nemôžu z daného uzla scenárového stromu nastať. Problém [\(2.11\)](#) preto nespĺňa podmienku časovej konzistentnosti v zmysle formulácie z článku [Shapiro \(2009\)](#). Model napriek tomu použijeme vďaka jeho prevedeniu na úlohu lineárneho programovania a vďaka jeho ľahkej interpretácii ako váženého súčtu podmienených hodnôt v riziku cez všetky stupne.



Obr. 2.5: Scenárový strom závislý na stave Markovského reťazca.



Obr. 2.6: Realizácie binomickej scenárovej mriežky.



Obr. 2.7: Uzly binomickej scenárovej mriežky.

3. Diskretizácia spojitého rozdelenia

Dôležitou úlohou vo výpočte viacstupňového stochastického programovania je správna aproximácia združeného spojitého rozdelenia náhodného vektoru pomocou diskrétného rozdelenia a riešenie viacstupňového stochastického programovania s aproximovaným diskrétnym rozdelením. Ako aproximované diskrétné rozdelenie nám môžu poslúžiť zdrojové dáta, získané z historického pozorovania. Avšak v numerickej štúdii budeme potrebovať väčšie množstvo scenárov, ako nám môžu poskytnúť dáta, preto sa v nasledujúcej časti zameriame na generovanie scenárov s predpísaným pravdepodobnostným rozdelením.

3.1 Generovanie scenárov

Scenáre získame vytvorením scenárového stromu, ktorého uzly budeme generovať momentovou metódou, na základe heuristického algoritmu z článku [Høyland a kol. \(2003\)](#). Scenárový strom budeme konštruovať postupne po jednotlivých uzloch v stupni t . Konštrukcia stromu bude prebiehať v dvoch krokoch:

1. *Inicializuj*

Nastav $t = 1$ a prirad' koreňu pravdepodobnosť 1.

2. *Generuj uzly v ďalšom stupni*

Pre každý uzol v stupni t definuj jeho potomkov v stupni $t + 1$. Definuj vlastnosti podmieneného rozdelenia (momenty a korelácie) a generuj realizácie náhodného vektoru s konečným diskrétnym rozdelením, konzistentné s definovanými vlastnosťami. Prirad' potomkom vygenerované realizácie a pravdepodobnosti. Ak $t = T - 1$, tak skonči, inak nastav $t := t + 1$ a opakuj krok 2.

V nasledujúcej časti popíšeme algoritmus na generovanie realizácií z diskrétného rozdelenia z článku [Høyland a kol. \(2003\)](#). Pre jednoduchosť v tejto časti vynecháme index t a popíšeme generovanie potomkov jedného uzlu v scenárovom strome. Cieľom metódy je vygenerovať K realizácií n -rozmerného náhodného vektora $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ s konečným diskrétnym rozdelením, s pravdepodobnosťami realizácií p_1, \dots, p_K , aby mali zložky náhodného vektora $i = 1, \dots, n$ predpísané stredné hodnoty μ_i , smerodajné odchýlky σ_i , šikmosť s_i , špicatosť k_i a aby mal

výsledný náhodný vektor korelačnú maticu \mathbf{R} . Požadujeme teda, aby platilo

$$\begin{aligned}\mu_i &= \mathbb{E} \xi_i \\ \sigma_i &= \sqrt{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^2} \\ s_i &= \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^3}{\sigma_i^3} \\ k_i &= \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)^4}{\sigma_i^4} \\ R_{ij} &= \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j},\end{aligned}\tag{3.1}$$

pre každé $i, j = 1, \dots, n$, kde R_{ij} sú prvky korelačnej matice \mathbf{R} .

Ako je uvedené v článku [Høyland a kol. \(2003\)](#), aby bola matica korelačnou maticou, musí byť symetrická, pozitívne semidefinitná matica s jednotkami na hlavnej diagonále. Pozitívna semidefinitnosť nám zaručí, že korelačná matica \mathbf{R} má Choleského rozklad

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top,\tag{3.2}$$

kde \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica. Budeme navyše predpokladať, že \mathbf{R} je pozitívne definitná, čo zaručí nenulovosť diagonálnych prvkov dolnej trojuholníkovej matice \mathbf{L} .

Všetky požadované vlastnosti na marginálne rozdelenie náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$ a realizácie sú zhrnuté v tabuľke [3.1](#).

	p_1	p_2	\dots	p_K				
$\boldsymbol{\xi}_1$	ξ_1^1	ξ_1^2	\dots	ξ_1^K	μ_1	σ_1	s_1	k_1
$\boldsymbol{\xi}_2$	ξ_2^1	ξ_2^2	\dots	ξ_2^K	μ_2	σ_2	s_2	k_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\boldsymbol{\xi}_n$	ξ_n^1	ξ_n^2	\dots	ξ_n^K	μ_n	σ_n	s_n	k_n

Tabuľka 3.1: Vlastnosti rozdelenia náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$.

Cieľom metódy momentov je vygenerovať realizácie $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^K$ tak, aby malo výsledné diskkrétne pravdepodobnostné rozdelenie vyššie predpísané vlastnosti.

Pokiaľ je pre nejaké $i \in \{1, \dots, n\}$ μ_i rôzne od 0, alebo σ_i rôzne od 1, prevedieme náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}$ na štandardizovaný tvar so zložkami

$$\xi_i^{st} = \frac{\xi_i - \mu_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, n.\tag{3.3}$$

Pomocou metódy momentov vygenerujeme realizácie náhodných veličín ξ_i^{st} a pomocou vzťahu

$$\xi_i = \sigma_i \xi_i^{st} + \mu_i, \quad i = 1, \dots, n\tag{3.4}$$

dostaneme realizácie pôvodného náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}$. Jednoduchým dosadením overíme, že pre $i \in \{1, \dots, n\}$ má náhodná veličina ξ_i^{st} nulovú strednú hodnotu

$$\mu_i^{st} = \mathbb{E} \xi_i^{st} = \frac{\mathbb{E} (\xi_i - \mu_i)}{\sigma_i} = 0.$$

Vďaka nulovej strednej hodnote sa rovná rozptyl ξ_i druhému momentu $E \xi_i^2$ a platí

$$(\sigma_i^{st})^2 = E(\xi_i^{st})^2 = \frac{E(\xi_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} = 1.$$

Podobne dosadením overíme, že šikmosť a špicatosť sa štandardizovaním nezmenia. Šikmosť náhodnej veličiny ξ_i^{st} sa rovná tretiemu momentu $E(\xi_i^{st})^3$ a platí

$$s_i^{st} = E(\xi_i^{st})^3 = \frac{E(\xi_i - \mu_i)^3}{\sigma_i^3} = s_i.$$

Špicatosť sa rovná štvrtému momentu $E(\xi_i^{st})^4$ a platí

$$k_i^{st} = E(\xi_i^{st})^4 = \frac{E(\xi_i - \mu_i)^4}{\sigma_i^4} = k_i.$$

Štandardizovaním sa nezmení ani korelačná matica. Prvok korelačnej matice náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}^{st}$ v i -tom riadku a j -tom stĺpci sa rovná $E \xi_i^{st} \xi_j^{st}$ a platí

$$R_{i,j}^{st} = E \xi_i^{st} \xi_j^{st} = \frac{E(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} = R_{i,j}.$$

V článku [Høyland a kol. \(2003\)](#) je popísaný teoretický algoritmus, ktorý funguje za predpokladu splnenia všetkých predpokladov uvedených nižšie a jeho heuristická modifikácia.

V prípade splnenia všetkých predpokladov uvedených nižšie vznikne náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$ z náhodného vektoru \boldsymbol{X} pomocou *maticovej transformácie*

$$\boldsymbol{\xi}^{st} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}, \quad (3.5)$$

kde \boldsymbol{L} je dolná trojuholníková matica z *Choleského rozkladu* korelačnej matice \boldsymbol{R} , t.j. platí

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top, \quad (3.6)$$

a $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n -rozmerný náhodný vektor. O zložkách náhodného vektoru X_1, \dots, X_n predpokladáme, že sú to nezávislé náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom, tzn. náhodný vektor \boldsymbol{X} má jednotkovú korelačnú maticu \boldsymbol{I} .

Nech $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom i -ty riadok maticovej transformácie bude v tvare

$$\xi_i^{st} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} X_j = \sum_{j=1}^i L_{ij} X_j, \quad (3.7)$$

kde posledná rovnosť platí vďaka tomu, že \boldsymbol{L} je dolná trojuholníková matica, t.j. $L_{ij} = 0$, $i < j \leq n$. Ak by mal n -rozmerný náhodný vektor \boldsymbol{X} navyše normálne rozdelenie, potom z vlastností normálneho rozdelenia vyplýva, že by náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$ vzniknutý maticovou transformáciou (3.5) mal n -rozmerné normálne rozdelenie s korelačnou maticou \boldsymbol{R} ([Høyland a kol. \(2003\)](#)). K podobnému záveru pridáme aj bez predpokladu normálneho rozdelenia náhodného vektoru \boldsymbol{X} , a to vďaka nasledujúcej vete, ktorá navyše určí tvar tretích a štvrtých marginálnych momentov náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}^{st}$. Formuláciu vety preberieme z článku [Høyland a kol. \(2003\)](#). Dôkaz sa v článku nevyskytuje, preto ju dokážeme sami.

Veta 2. (Høyland a kol. (2003))

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n -rozmerný náhodný vektor s nasledujúcimi vlastnosťami:

- i. $E X_i^l$ existuje pre $l = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, n$,
- ii. $E X_i = 0$, $E X_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$,
- iii. jednorozmerné náhodné veličiny X_i , X_j sú nezávislé pre každé $i \neq j$.

Ďalej, nech \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica veľkosti n taká, že $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$, kde \mathbf{R} je korelačná matica, t.j. symetrická, pozitívne semidefinítaná matica s jednotkami na hlavnej diagonále. Ak definujeme náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st} = (\xi_i^{st}, \dots, \xi_n^{st})$ ako $\boldsymbol{\xi}^{st} = \mathbf{L}\mathbf{X}$, potom $\boldsymbol{\xi}^{st}$ má nasledujúce vlastnosti:

- a) $E(\xi_i^{st})^l$ existuje pre $l = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, n$,
- b) $E \xi_i^{st} = 0$, $E(\xi_i^{st})^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$,
- c) $\boldsymbol{\xi}^{st}$ má korelačnú maticu $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$
- d) $E(\xi_i^{st})^3 = \sum_{j=1}^i L_{ij}^3 E X_j^3$, $i = 1, \dots, n$,
- e) $E(\xi_i^{st})^4 = 3 + \sum_{j=1}^i L_{ij}^4 (E X_j^4 - 3)$, $i = 1, \dots, n$.

Dôkaz.

- a) Nech $l \in \{1, \dots, 4\}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Zo vzťahu (3.7) vyplýva že

$$E(\xi_i^{st})^l = E \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} X_j \right)^l = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_l=1}^n L_{i,j_1} \cdots L_{i,j_l} E(X_{j_1} \cdots X_{j_l}) \quad (3.8)$$

Vďaka nezávislosti náhodných veličín X_1, \dots, X_n je posledný vzťah lineárna kombinácia momentov do rádu l , ktoré podľa predpokladu i. existujú, preto existuje aj $E(\xi_i^{st})^l$.

- b) Dosadením $l = 1$ do vzťahu (3.8) dostávame

$$E \xi_i^{st} = \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1} E X_{j_1} = 0,$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii. o nulovej strednej hodnote náhodných veličín X_1, \dots, X_n . Dosadením $l = 2$ do vzťahu (3.8) dostávame

$$\begin{aligned} E(\xi_i^{st})^2 &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i,j_1} L_{i,j_2} E(X_{j_1} X_{j_2}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i,j_1} L_{i,j_2} \delta_{j_1,j_2} = \\ &= \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1}^2 = \sum_{j_1=1}^n L_{i,j_1} L_{j_1,i}^\top = R_{ii} = 1, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii. o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. δ_{j_1,j_2} je Kroneckerovo delta, t.j.

$$\delta_{j_1,j_2} = \begin{cases} 1, & \text{ak } j_1 = j_2, \\ 0, & \text{ak } j_1 \neq j_2. \end{cases}$$

c) Nech $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$. Priamym výpočtom dostaneme

$$\begin{aligned} \text{corr}(\xi_{i_1}^{st}, \xi_{i_2}^{st}) &= \mathbb{E}(\xi_{i_1}^{st} \xi_{i_2}^{st}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i_1, j_1} L_{i_2, j_2} \mathbb{E}(X_{j_1} X_{j_2}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n L_{i_1, j_1} L_{i_2, j_2} \delta_{j_1, j_2} = \sum_{j_1=1}^n L_{i_1, j_1} L_{i_2, j_1} = \sum_{j_1=1}^n L_{i_1, j_1} L_{j_1, i_2}^\top = \\ &= R_{i_1, i_2}, \end{aligned}$$

čo je prvok korelačnej matice \mathbf{R} . Prvá rovnosť vyplýva z tvrdenia b) o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle náhodných veličín $\xi_1^{st}, \dots, \xi_n^{st}$, zvyšné rovnosti sú analógiou výpočtov vyššie.

d) Dosadením $l = 3$ do vzťahu (3.8) dostávame

$$\mathbb{E}(\xi_i^{st})^3 = \sum_{j_1=1}^i \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i L_{i, j_1} L_{i, j_2} L_{i, j_3} \mathbb{E}(X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3}) = \sum_{j_1=1}^i L_{i, j_1}^3 \mathbb{E} X_{j_1}^3,$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii. o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. Všetky ostatné členy sa vďaka nulovej strednej hodnote X_1, \dots, X_n vynulujú.

e) Dosadením $l = 4$ do vzťahu (3.8) dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_i^{st})^4 &= \sum_{j_1=1}^i \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i \sum_{j_4=1}^i L_{i, j_1} L_{i, j_2} L_{i, j_3} L_{i, j_4} \mathbb{E}(X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3} X_{j_4}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i, j_1}^4 \mathbb{E} X_{j_1}^4 + 3 \sum_{j_2=1}^i \sum_{j_3=1}^i L_{i, j_2}^2 L_{i, j_3}^2 \mathbb{E} X_{j_2}^2 \mathbb{E} X_{j_3}^2 - 3 \sum_{j_4=1}^i L_{i, j_4}^4 (\mathbb{E} X_{j_4}^2)^2 \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i, j_1}^4 \mathbb{E} X_{j_1}^4 + 3 \sum_{j_2=1}^i L_{i, j_2}^2 \sum_{j_3=1}^i L_{i, j_3}^2 - 3 \sum_{j_4=1}^i L_{i, j_4}^4 = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i, j_1}^4 (\mathbb{E} X_{j_1}^4 - 3) + 3 \sum_{j_2=1}^i L_{i, j_2} L_{j_2, i}^\top \sum_{j_3=1}^i L_{i, j_3} L_{j_3, i}^\top = \\ &= \sum_{j_1=1}^i L_{i, j_1}^4 (\mathbb{E} X_{j_1}^4 - 3) + 3 R_{i, i} R_{i, i} = \sum_{j=1}^i L_{i, j}^4 (\mathbb{E} X_j^4 - 3) + 3, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z predpokladu ii. o nulovej strednej hodnote a jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n a z ich nezávislosti. Všetky ostatné členy majú v súčine strednú hodnotu niektorej z náhodných veličín X_1, \dots, X_n a vďaka predpokladu o nulovej strednej hodnote X_1, \dots, X_n sa vynulujú. Tretia rovnosť opäť vyplýva z predpokladu o jednotkovom rozptyle X_1, \dots, X_n . V poslednej rovnosti je využitý predpoklad o jednotkovej diagonále matice \mathbf{R} .

Tým je veta dokázaná. □

Dôsledok. Nech navyše je \mathbf{R} pozitívne definitná matica. Potom pre $i = 1, \dots, n$

môžeme tretí a štvrtý moment náhodnej veličiny X_i vyjadriť ako:

$$s_i^{tr} = \mathbb{E} X_i^3 = \frac{1}{L_{i,i}^3} (\mathbb{E} (\xi_i^{st})^3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}^3 \mathbb{E} X_j^3) \quad (3.9)$$

$$k_i^{tr} = \mathbb{E} X_i^4 = 3 + \frac{1}{L_{i,i}^4} (\mathbb{E} (\xi_i^{st})^4 - 3 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j}^4 (\mathbb{E} X_j^4 - 3)). \quad (3.10)$$

Dôkaz. Pozitívna definitnosť matice \mathbf{R} zaručí nenulovosť diagonálnych prvkov $L_{i,i}$ dolnej trojuholníkovej matice \mathbf{L} . Vzťahy vyššie potom dostaneme priamym výpočtom z vety [\[2\]](#). □

Náhodná veličina X_i vznikne v rámci teoretického algoritmu pomocou *kubickej transformácie*

$$X_i = a_i + b_i W_i + c_i W_i^2 + d_i W_i^3, \quad (3.11)$$

kde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ a W_i je náhodná veličina so známymi prvými dvanástimi momentmi. S využitím vzťahu [\(3.11\)](#) odvodíme sústavu nelineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_i &= a_i + b_i \mathbb{E} W_i + c_i \mathbb{E} W_i^2 + d_i \mathbb{E} W_i^3 \\ \mathbb{E} X_i^2 &= a_i^2 + 2a_i b_i \mathbb{E} W_i + (2a_i c_i + b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + (2a_i d_i + 2b_i c_i) \mathbb{E} W_i^3 + \\ &\quad + (2b_i d_i + c_i^2) \mathbb{E} W_i^4 + 2c_i d_i \mathbb{E} W_i^5 + d_i^2 \mathbb{E} W_i^6 \\ \mathbb{E} X_i^3 &= a_i^3 + 3a_i^2 b_i \mathbb{E} W_i + (3a_i^2 c_i + 3a_i b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + (6a_i b_i c_i + 3a_i^2 d_i + b_i^3) \mathbb{E} W_i^3 + \\ &\quad + (3a_i c_i^2 + 6a_i b_i d_i + 3b_i^2 c_i) \mathbb{E} W_i^4 + (6a_i c_i d_i + 3b_i^2 d_i + 3b_i c_i^2) \mathbb{E} W_i^5 + \\ &\quad + (3a_i d_i^2 + 6b_i c_i d_i + c_i^3) \mathbb{E} W_i^6 + (3b_i d_i^2 + 3c_i^2 d_i) \mathbb{E} W_i^7 + 3c_i d_i^2 \mathbb{E} W_i^8 + \\ &\quad + d_i^3 \mathbb{E} W_i^9 \\ \mathbb{E} X_i^4 &= a_i^4 + 4a_i^3 b_i \mathbb{E} W_i + (4a_i^3 c_i + 6a_i^2 b_i^2) \mathbb{E} W_i^2 + \\ &\quad + (4a_i b_i^3 + 12a_i^2 b_i c_i + 4a_i^3 d_i) \mathbb{E} W_i^3 + \\ &\quad + (b_i^4 + 12a_i b_i^2 c_i + c_i^2 + 6a_i^2 c_i^2 + 12a_i^2 b_i d_i) \mathbb{E} W_i^4 + \\ &\quad + (4b_i^3 c_i + 12a_i b_i c_i^2 + 12a_i b_i^2 d_i + 12a_i^2 c_i d_i) \mathbb{E} W_i^5 + \\ &\quad + (6b_i^2 c_i^2 + 4a_i c_i^3 + 4b_i^3 d_i + 24a_i b_i + b_i + c_i + d_i + 6a_i^2 d_i^2) \mathbb{E} W_i^6 + \\ &\quad + (4b_i c_i^3 + 12b_i^3 c_i d_i + 12a_i c_i^2 d_i + 12a_i b_i d_i^2) \mathbb{E} W_i^7 + \\ &\quad + (c_i^4 + 12b_i c_i^2 d_i + 6b_i^2 d_i^2 + 12a_i c_i d_i^2) \mathbb{E} W_i^8 + \\ &\quad + (4c_i^3 d_i + 12b_i c_i d_i^2 + 4a_i d_i^3) \mathbb{E} W_i^9 + (6c_i^2 d_i^2 + 4b_i d_i^3) \mathbb{E} W_i^{10} + \\ &\quad + 4c_i d_i^3 \mathbb{E} W_i^{11} + d_i^4 \mathbb{E} W_i^{12}. \end{aligned}$$

Pokiaľ nemá systém rovníc reálne riešenie, vezmeme také koeficienty, ktoré minimalizujú súčet kvadratických odchýlok pravých strán rovníc od transformovaných momentov $\mathbb{E} X_i^l$, $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, 4$. Rovnako ako v [Høyland a kol. \(2003\)](#) za W_i vezmeme diskretnú náhodnú veličinu, ktorej realizácie vygenerujeme náhodným generátorom z normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$. Momenty takto vygenerovanej konečnej diskretnej náhodnej veličiny W_i sa budú líšiť od teoretických momentov rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$, avšak kvôli zjednodušeniu použijeme teoretické momenty a aproximujeme nimi momenty náhodnej veličiny W_i . Zo sústavy rovníc vyššie následne dopočítame koeficienty a_i, b_i, c_i, d_i .

Uvedieme jednotlivé kroky teoretického algoritmu:

1. *Inicializuj*

Definuj cieľové hodnoty marginálneho rozdelenia μ_i , σ_i , s_i , k_i a korelačnú maticu \mathbf{R} . Vypočítaj Choleského dekompozíciu $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$. Pomocou vzťahu (3.9) a (3.10) spočítaj s_i^{tr} a k_i^{tr} .

2. *Nájdí počiatkové rozdelenie*

Vygeneruj K realizácií z normovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ n -rozmerného náhodného vektoru \mathbf{W} s diskrétnym rozdelením v štandardizovanom tvare a so stochasticky nezávislými zložkami, ktorého realizácie majú pravdepodobnosti $p_1 = \dots = p_K$.

3. *Uprav transformované cieľové momenty*

Pomocou kubickej transformácie (3.11) vypočítaj náhodný vektor \mathbf{X} so stochasticky nezávislými zložkami a momentmi $0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr}$.

4. *Uprav korelácie*

Pomocou maticovej transformácie (3.5) vypočítaj náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$ v štandardizovanom tvare s momentmi $0, 1, s_i^{st}, k_i^{st}$ a korelačnou maticou \mathbf{R} . Pomocou transformácie (3.4) získaj požadované realizácie.

Ako sa uvádza v článku Høyland a kol. (2003), pre konečný počet realizácií je problém vygenerovať náhodný vektor so stochasticky nezávislými zložkami. Autori preto navrhli heuristickú modifikáciu algoritmu, ktorá by mala viesť aspoň k odstráneniu korelovanosti medzi jednotlivými zložkami náhodného vektoru.

Nech $\boldsymbol{\xi}^{st}$ je náhodný vektor v štandardizovanom tvare s korelačnou maticou \mathbf{R} . Definujme spätnú transformáciu ako

$$\boldsymbol{\xi}^{sp} = \mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\xi}^{st}.$$

Potom platí, že

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\xi}^{sp}(\boldsymbol{\xi}^{sp})^\top = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^\top(\mathbf{L}^{-1})^\top = \mathbf{I}, \quad (3.12)$$

kde využívame, že $\boldsymbol{\xi}^{st}$ je v štandardizovanom tvare. Vidíme, že po spätnej transformácii má náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{sp}$ jednotkovú korelačnú maticu \mathbf{I} .

Uvedieme jednotlivé kroky alternatívneho algoritmu. Prvý krok v alternatívnom algoritme zostáva oproti teoretickej verzii nezmenený. V druhom kroku požadujeme vygenerovanie K náhodných vektorov so stochasticky nezávislými zložkami. Namiesto teoretickej stochastickej nezávislosti budeme požadovať približne nulové korelácie a dostatočne dobrú aproximáciu momentov. Algoritmus preto pokračuje dvoma fázami. Cieľom prvej fázy je skonštruovať diskretný náhodný vektor \mathbf{X} s nezávislými zložkami a prvými štyrmi momentmi $0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr}$.

1. *Inicializuj*

Definuj $\epsilon^X > 0$. Podobne, ako v prípade teoretického algoritmu pomocou kubickej transformácie vypočítaj náhodný vektor \mathbf{X} s momentmi $0, 1, s_i^{tr}, k_i^{tr}$.

2. *Uprav korelácie*

Vypočítaj korelačnú maticu \mathbf{R}^X vektoru \mathbf{X} . Ak $\|\mathbf{R}^X - \mathbf{I}\| < \epsilon^X$ stop, inak urči Choleského dekompozíciu $\mathbf{R}^X = \mathbf{L}^X(\mathbf{L}^X)^\top$

3. *Odstráň korelácie*

Spočítaj spätnú transformáciu $\mathbf{X}^{sp} = (\mathbf{L}^X)^{-1} \mathbf{X}$. Na základe vzťahu (3.12) zaručí spätná transformácia nulové korelácie.

4. *Uprav na transformované cieľové momenty*

Aplikuj kubickú transformáciu (3.11) na transformovaný vektor \mathbf{X}^{sp} na dosiahnutie požadovaných momentov. Prejdi na krok 2.

V druhej fáze algoritmu použijeme spätnú transformáciu na hľadanie vektoru s cieľovou korelačnou maticou \mathbf{R} .

1. *Inicializuj*

Definuj $\epsilon^{st} > 0$. Pomocou maticovej transformácie (3.5) aplikovanej na vektor \mathbf{X}^{sp} vypočítaj náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$.

2. *Spočítaj korelačnú maticu*

Vypočítaj \mathbf{R}^{st} . Ak $\|\mathbf{R}^{st} - \mathbf{R}\| < \epsilon^{st}$ stop, inak spočítaj $\mathbf{R}^{st} = \mathbf{L}^{st}(\mathbf{L}^{st})^\top$

3. *Odstráň korelácie*

Spočítaj spätnú transformáciu $\boldsymbol{\xi}^{sp} = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\xi}^{st}$. Vďaka vzťahu (3.12) zaručí spätná transformácia nulové korelácie náhodného vektoru $\boldsymbol{\xi}^{sp}$.

4. *Maticová transformácia*

Aplikuj maticovú transformáciu $\boldsymbol{\xi}^{st} = \mathbf{L} \boldsymbol{\xi}^{sp}$ na dosiahnutie požadovanej korelačnej matice \mathbf{R} .

5. *Vypočítaj cieľové momenty*

Aplikuj momentovú transformáciu (3.11) na náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}^{st}$ a prejdi na krok 2.

4. Praktická časť

V tejto kapitole využijeme poznatky z teoretickej časti a vygenerujeme rôzne scenárové stromy, ktoré použijeme na riešenie problému privátneho investora definovaného optimalizačným modelom (2.11). Testovať vhodnosť scenárových stromov budeme pomocou kvality získaných výstupov z optimalizačného modelu.

4.1 Dáta

Dáta pre praktickú časť berieme z knižnice profesora Kennetha R. Frencha¹. Dáta predstavujú hrubé mesačné výnosy šiestich portfólií od júla 1926 do mája 2018. Každé z nich je tvorené prienikom dvoch portfólií vytvorených na základe trhovej veľkosti majetku firiem a troch portfólií vytvorených na základe pomeru účtovnej hodnoty a trhovej hodnoty majetku firiem. Viac informácií k tvorbe dátového súboru je možné nájsť na stránke uvedenej v poznámke pod čiarou. Dátový súbor rozdelíme na dve časti. Prvú časť tvoria výnosy od júla 1926 do konca roku 2007. Pomocou tohto dátového súboru vygenerujeme scenárové stromy a na ich základe určíme riešenie optimalizačnej úlohy. Druhú časť tvoria dáta od januára 2008 do mája 2018, ktoré použijeme na testovanie stability optimalizačného modelu. S hrubými výnosmi pracujeme ako s multiplikatívnymi koeficientmi, preto transformujeme výnosy v zdrojových dátach vyjadrené v percentách transformáciou schematicky uvedenou ako

$$výnos \mapsto \frac{výnos}{100} + 1.$$

V tabuľke 4.1 sú uvedené základné popisné štatistiky z primárneho dátového súboru.

Štatistika	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,6763	0,6995	0,6617	0,7113	0,7185	0,6489
Arit. priemer	1,0100	1,0129	1,0153	1,0092	1,0100	1,0126
Maximum	1,5994	1,6220	1,8358	1,3374	1,5189	1,6778
Smer. odchýlka	0,0768	0,0711	0,0833	0,0542	0,0577	0,0725
Šikmosť	0,7545	1,3140	2,2628	-0,0930	1,4025	1,7357
Špicatosť	10,9214	17,7128	25,4661	8,6430	21,3721	21,9114
Počet	978	978	978	978	978	978

Tabuľka 4.1: Základné popisné štatistiky šiestich aktív, ktoré použijeme na skladanie portfólia.

K dispozícii máme dátový súbor s 978 pozorovaniami. Najnižší výnos bol pozorovaný zo šiesteho aktíva v septembri roku 1931, za ním nasleduje výnos z tretieho aktíva. V tomto čase dosiahli svoje minimá všetky aktíva, okrem prvého. Najvyšší výnos bol pozorovaný z tretieho aktíva v auguste 1932, za ním nasleduje opäť výnos zo šiesteho aktíva. Tretie aktívum má zo všetkých aktív

¹<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/>

najvyššiu smerodajnú odchýlku, šieste aktívum tretiu najvyššiu, čo indikuje vysokú rizikovosť oboch aktív. Všetky portfólia zaznamenali svoj maximálny výnos v rokoch 1932 alebo 1933. Môžeme si všimnúť relatívne malý časový odstup medzi pozorovanými najnižšími a najvyššími výnosmi z nášho dátového súboru, čo naznačuje výskyt nestabilného obdobia s nízkymi výnosmi a následne vysokou volatilitou výnosov. Identifikovaním takýchto období sa budeme venovať neskôr v rámci definície stavov markovského reťazca.

Rozloženie výnosov okolo aritmetického priemeru popisuje koeficient šikmosti. Záporná šikmosť v prípade štvrtého portfólia vyjadruje, že vľavo od aritmetického priemeru sa vyskytujú vzdialenejšie hodnoty výnosov ako vpravo a väčšina hodnôt sa nachádza vpravo bližšie k priemeru. Výnosy ostatných portfólií sú kladne zošikmené, to znamená, že vpravo od priemeru sú vzdialenejšie hodnoty výnosov ako vľavo a väčšina hodnôt sa nachádza vľavo bližšie k priemeru. O tom, akým spôsobom sa koncentrujú výnosy portfólia okolo aritmetického priemeru, hovorí koeficient špicatosti. Všetky portfólia majú koeficient špicatosti väčší ako 3, čo vyjadruje, že väčšina hodnôt sa koncentruje bližšie k aritmetickému priemeru, ako by to bolo v prípade normálne rozdelených výnosov.

V tabuľke 4.2 sú uvedené korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
1	1,0000	0,9500	0,8939	0,8523	0,8104	0,8111
2	0,9501	1,0000	0,9616	0,8440	0,8797	0,8973
3	0,8939	0,9616	1,0000	0,7837	0,8692	0,9158
4	0,8523	0,8440	0,7837	1,0000	0,8892	0,8322
5	0,8104	0,8797	0,8692	0,8892	1,0000	0,9363
6	0,8111	0,8973	0,9158	0,8322	0,9363	1,0000

Tabuľka 4.2: Korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.

Vidíme, že medzi výnosmi jednotlivých aktív je vysoká kladná korelácia. Najnižší korelačný koeficient je medzi tretím a štvrtým portfóliom, ale aj ten má relatívne vysokú hodnotu nad 0,78.

4.2 Po stupňoch nezávislý scenárový strom

V tejto časti budeme reprezentovať náhodné výnosy pomocou po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Realizácie k jednotlivým uzlom vygenerujeme pomocou metódy momentov z kapitoly 3. Vstupnými parametrami do algoritmu je požadovaná stredná hodnota výnosov, smerodajná odchýlka, šikmosť, špicatosť a korelačná matica. Korelačná matica je uvedená v tabuľke 4.2. Ostatné parametre sú uvedené v tabuľke 4.1. V tabuľke 4.1 vidíme, že stredné hodnoty nie sú 0 a smerodajné odchýlky nie sú 1, preto prevedieme náhodné výnosy na štandardizovaný tvar podľa vzťahu (3.3). Takto upravené výnosy majú momenty uvedené v tabuľke 4.3. Vidíme, že vďaka úprave (3.3) sme dostali nulovú strednú hodnotu a jednotkový rozptyl náhodných výnosov. Ďalej vidíme, že úprava (3.3) nemá vplyv na šikmosť a špicatosť. Štandardizácia pomocou vzťahu (3.3) nemá vplyv ani na korelačnú maticu.

i	1	2	3	4	5	6
μ_i^{st}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
σ_i^{st}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
s_i^{st}	0,7545	1,3140	2,2628	-0,0930	1,4025	1,7357
k_i^{st}	10,9214	17,7128	25,4661	8,6430	21,3721	21,9114

Tabuľka 4.3: Prvé štyri momenty štandardizovaných výnosov.

Na základe vety 2 je v metóde momentov použitá ešte jedna transformácia šikmosti a špicatosti, uvedená v tabuľke 4.4.

i	1	2	3	4	5	6
μ_i^{tr}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
σ_i^{tr}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
s_i^{tr}	0,7545	21,9416	36,7131	-4,4372	5,0968	-13,8293
k_i^{tr}	10,9214	873,6390	544,6400	23,0570	117,6390	-1516,21

Tabuľka 4.4: Prvé štyri momenty transformovaných výnosov na základe vety 2.

Šikmost a špicatosť prvého aktíva sa nemení, pretože vo vzťahoch (3.9) a (3.10) vypadáva súčtová zložka a hodnota $L_{1,1} = 1$. Ostatné diagonálne zložky dolnej trojuholníkovej matice L sú menšie ako jedna, preto ako prvky v menovateli zvyšujú hodnotu transformovaných momentov oproti štandardizovaným.

4.2.1 Dvojstupňový scenárový strom

V tejto časti sa zameriame na prípad dvojstupňového po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Postupne vygenerujeme dvojstupňové po stupňoch nezávislé scenárové stromy a overíme vhodnosť ich použitia v úlohe privátneho investora. Podrobný popis algoritmu použitého na generovanie stromov je uvedený v kapitole 3. Počet ulov v druhom stupni stanovíme na 10000. V prípade dvojstupňového stromu ide zároveň o celkový počet scenárov a takto vygenerované scenárové stromy použijeme ako vstup do optimalizačnej úlohy (2.11). Za počiatočný kapitál zvolíme pre jednoduchosť hodnotu $B = 1$. Na konci stanoveného obdobia požadujeme čiastku aspoň $G = 1,001$. Transakčné náklady spojené s nákupom a predajom aktív predpokladáme rovnaké v hodnote $c_b = c_s = 0,01$ %. Za hladinu spoľahlivosti podmienenej hodnoty v riziku volíme $\alpha = 0,95$. Váhu λ nastavíme na 1. Dokopy vygenerujeme päť stromov a každý z nich použijeme ako vstup do optimalizačnej úlohy.

Na základe článku Kaut a Wallace (2007) budeme skúmať vhodnosť danej scenárovej štruktúry analyzovaním výstupov optimalizačného modelu, ktoré dostaneme po dosadení danej scenárovej štruktúry. Najskôr sa pozrieme na to, či sa výsledky optimalizačného modelu príliš nelíšia aplikovaním iného vygenerovaného stromu z rovnakého dátového súboru. Pokiaľ budú výstupy z optimalizačného modelu približne rovnaké, budeme považovať po stupňoch nezávislý strom za vhodnú štruktúru pre náš model z pohľadu takto definovanej vnútornej stability. Označme vygenerované stromy symbolmi S_1, \dots, S_5 , optimálne riešenia získané na základe jednotlivých stromov $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_5^*$ a účelovú funkciu jednoducho ako f .

Cieľom testu je zistiť, či platí

$$f(\mathbf{x}_i^*; S_i) \approx f(\mathbf{x}_j^*; S_j), \quad (4.1)$$

pre každé $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 5$.

Strom	Opt.	1	2	3	4	5	6
1	0,3552	0,7879	0,0927	0,0000	0,0730	0,0463	0,0000
2	0,3521	0,7986	0,0838	0,0000	0,0549	0,0625	0,0000
3	0,3561	0,7734	0,0976	0,0000	0,0861	0,0427	0,0000
4	0,3412	0,7945	0,0984	0,0000	0,0589	0,0481	0,0000
5	0,3595	0,8359	0,0530	0,0000	0,0830	0,0280	0,0000
Priem.	0,3528	0,7981	0,0851	0,0000	0,0712	0,0455	0,0000
Odch.	0,0070	0,0232	0,0189	0,0000	0,0140	0,0124	0,0000

Tabuľka 4.5: Optimálna hodnota účelovej funkcie a optimálne rozhodnutie v prvom stupni úlohy dvojstupňového programovania bez obmedzenia na nákup.

V tabuľke 4.5 je uvedená investičná stratégia pre každý z piatich vygenerovaných stromov. V prvom stĺpci je vypočítaná optimálna hodnota účelovej funkcie, v ďalších stĺpcoch je optimálne rozhodnutie v prvom stupni. V posledných dvoch riadkoch je uvedená priemerná hodnota zo všetkých päť výstupov a smerodajná odchýlka. Tabuľka naznačuje splnenie kritéria vnútornej stability optimalizačného modelu v rámci jedného dátového súboru. Pokiaľ zvolíme takto definované kritérium vhodnosti scenárovej štruktúry, môžeme pokladať dvojstupňový po stupňoch nezávislý scenárový strom za vhodný na použitie do nami definovaného optimalizačného modelu.

Z tabuľky 4.5 ďalej vidíme, že pokiaľ neobmedzíme množstvo kapitálu investovaného do jedného aktíva, model radí investovať viac ako 70 % kapitálu do prvého aktíva. Do tretieho a šiesteho aktíva radí model neinvestovať. Pripomíname, že na základe popisných štatistík sa práve tretie a šieste aktívum zdá byť rizikovejšie oproti ostatným, preto ich vynechanie z portfólia považujeme za správne. Vo všetkých nasledujúcich výpočtoch predpokladáme, že ako investor chceme obmedziť maximálne množstvo kapitálu investovaného do jedného aktíva maximálne na čiastku 0,7.

Strom	Opt.	1	2	3	4	5	6
1	0,3511	0,7000	0,1480	0,0000	0,1094	0,0424	0,0000
2	0,3517	0,7000	0,1652	0,0000	0,0839	0,0508	0,0000
3	0,3395	0,7000	0,1805	0,0000	0,0964	0,0230	0,0000
4	0,3419	0,7000	0,1588	0,0000	0,1103	0,0307	0,0000
5	0,3484	0,7000	0,1731	0,0000	0,0903	0,0365	0,0000
Priem.	0,3465	0,7000	0,1651	0,0000	0,0981	0,0367	0,0000
Odch.	0,0055	0,0000	0,0126	0,0000	0,0117	0,0107	0,0000

Tabuľka 4.6: Optimálna hodnota účelovej funkcie a rozhodnutia v prvom stupni úlohy dvojstupňového programovania s obmedzením na nákup.

V tabuľke 4.6 sú zobrazené optimálne hodnoty účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia pre päť rôznych scenárových stromov, pokiaľ obmedzíme zhora množstvo investovaného kapitálu do každého aktíva. Vidíme, že pre rôzne scenárové

stromy nedochádza k výrazným rozdielom v hodnote účelovej funkcie, dokonca ani v optimálnych riešeniach v prvom stupni. Pokiaľ určíme ako kritérium vhodnosti scenárovej štruktúry vnútornú stabilitu modelu v rámci jedného dátového súboru, považujeme dvojstupňový po stupňoch nezávislý scenárový strom za vhodnú štruktúru na použitie do optimalizačného modelu. Optimalizačný model radí investovať maximálnu povolenú čiastku 0,7 do prvého aktíva, do tretieho a šiesteho aktíva model odporúča neinvestovať. V posledných dvoch riadkoch je uvedený prímer za všetky scenárové stromy a smerodajná odchýlka.

Označme strom S_1 ako primárny strom. Pozrieme sa, ako sa líši primárny strom od ostatných stromov v kontexte merania euklidovskej vzdialenosti medzi výstupmi optimalizačného modelu. V tabuľke 4.7 sú uvedené euklidovské vzdialenosti optimálnych rozhodnutí a hodnôt účelovej funkcie medzi modelom, do ktorého vstupuje primárny strom a ostatnými modelmi.

Stromy	Vzdial. opt.	Vzdial. rieš.
$S_1 \times S_2$	0,0006	0,0319
$S_1 \times S_3$	0,0116	0,0400
$S_1 \times S_4$	0,0092	0,0159
$S_1 \times S_5$	0,0027	0,0321

Tabuľka 4.7: Euklidovská vzdialenosť riešení a účelovej funkcie medzi primárnym stromom a ostatnými.

Z tabuľky 4.7 môžeme vidieť, že zmena scenárového stromu v rámci jedného dátového súboru nemá výrazný vplyv na výsledky optimalizačného modelu.

Ďalšou možnosťou, ako testovať vhodnosť použitia scenárového stromu v optimalizačnom modeli, je testovať stabilitu optimalizačného modelu dosadením scenárového stromu mimo dátový súbor, na základe ktorého boli vygenerované pôvodné scenárové stromy. Označme S_n nový scenárový strom, vygenerovaný na základe druhej časti dátového súboru, ktorú sme si oddelili na začiatku výpočtovej časti. V tabuľke 4.8 sú uvedené základné popisné štatistiky druhej časti dátového súboru, z ktorého budeme generovať nový scenárový strom. Vidíme, že sa znížila smerodajná odchýlka všetkých aktív oproti prvému dátovému súboru.

Štatistika	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,8617	0,9217	0,9316	0,9375	0,9440	0,9201
Arit. priemer	1,0092	1,0089	1,0087	1,0114	1,0072	1,0084
Maximum	1,0880	1,1238	1,1480	1,0796	1,0861	1,1235
Smer. odchýlka	0,0475	0,0417	0,0433	0,0296	0,0288	0,0380
Šikmosť	-0,7523	0,2046	0,3974	0,0546	0,1510	0,1783
Špicatosť	3,6324	2,9636	3,6499	2,9524	3,4516	3,5927
Počet	125	125	125	125	125	125

Tabuľka 4.8: Základné popisné štatistiky druhej časti dátového súboru.

Cieľom tejto varianty testu je overiť, či pre pôvodné riešenia $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_5^*$ a nový scenárový strom S_n , získaný mimo dátový súbor, z ktorého sa generovali scenárové stromy S_1, \dots, S_5 , platí

$$f(\mathbf{x}_i^*; S_n) \approx f(\mathbf{x}_j^*; S_n), \quad (4.2)$$

pre každé $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 5$. V tabuľke 4.9 sú uvedené nové hodnoty účelovej funkcie pre každé pôvodné optimálne riešenie po dosadení stromu S_n .

Strom	pôvodné riešenie	$f(\mathbf{x}_i^*; S_n)$
1	{0,7000; 0,1480; 0,0000; 0,1094; 0,0424; 0,0000}	0,4407
2	{0,7000; 0,1652; 0,0000; 0,0839; 0,0508; 0,0000}	0,4649
3	{0,7000; 0,1805; 0,0000; 0,0964; 0,0230; 0,0000}	0,4492
4	{0,7000; 0,1588; 0,0000; 0,1103; 0,0307; 0,0000}	0,4525
5	{0,7000; 0,1731; 0,0000; 0,0903; 0,0365; 0,0000}	0,4525
Aritmetický priemer		0,4521
Smerodajná odchýlka		0,0087

Tabuľka 4.9: Hodnota účelovej funkcie pre pôvodné riešenie v prvom stupni a nový scenárový strom.

V tabuľke 4.9 nepozorujeme výrazné rozdiely medzi účelovými funkciami získanými na základe pôvodných riešení a nového stromu. Pokiaľ určíme ako kritérium vhodnosti použitia scenárového stromu stabilitu modelu v pre scenárový strom z iného dátového súboru, považujeme dvojstupňový po stupňoch nezávislý scenárový strom za vhodný na použitie v optimalizačnom modeli.

4.2.2 Trojstupňový scenárový strom

V tejto časti budeme generovať trojstupňové po stupňoch nezávislé scenárové stromy, ktoré použijeme ako vstup do optimalizačného modelu. Na základe výsledkov modelu otestujeme vhodnosť daného stromu a určíme optimálnu investičnú stratégiu. Za počet potomkov v druhom stupni zvolíme 300 a pre každý uzol v druhom stupni generujeme 300 potomkov v treťom stupni. Dokopy má scenárový strom 90000 uzlov v treťom stupni a teda 90000 scenárov. Pre po stupňoch nezávislý scenárový strom platí, že všetky uzly v druhom stupni majú rovnakých potomkov v treťom stupni s rovnakými pravdepodobnosťami. Parameter λ_t , ktorým určujeme váhu k podmienenej hodnote v riziku v danom stupni, nastavíme na $\lambda_t = \frac{t}{T}$, $t = 2, \dots, T$. To znamená, že v druhom stupni je $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ a v treťom stupni je $\lambda_3 = 1$. Týmto spôsobom zvyšujeme averziu k riziku smerom ku koncu investičného obdobia. Rovnako ako v dvojstupňovej úlohe vygenerujeme päť trojstupňových po stupňoch nezávislých scenárových stromov a pre každý z nich dopočítame optimálne rozhodnutie a optimálnu hodnotu účelovej funkcie modelu.

V tabuľke 4.10 sú uvedené optimálne hodnoty účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni. Vidíme, že pre rôzne scenárové stromy v rámci jedného dátového výberu sa optimálna účelová funkcia výrazne nemení. Na základe kritéria vnútornej stability modelu sa teda javí trojstupňový po stupňoch nezávislý strom ako vhodný na použitie do optimalizačného modelu. V prvom stupni radí optimalizačný model investovať maximálnu povolenú čiastku do prvého aktíva, naopak do šiesteho aktíva model odporúča neinvestovať. V porovnaní s dvojstupňovým stromom môžeme konštatovať, že optimálna stratégia v prvom stupni sa významne nemení. pozrieme sa na priemerný nákup a predaj aktív v druhom stupni.

Strom	Opt.	1	2	3	4	5	6
1	0,6342	0,7000	0,1848	0,0099	0,0335	0,0717	0,0000
2	0,6422	0,7000	0,1752	0,0374	0,0872	0,0274	0,0000
3	0,6580	0,7000	0,1781	0,0000	0,1218	0,0000	0,0000
4	0,6480	0,7000	0,2020	0,0000	0,0979	0,0000	0,0000
5	0,6673	0,7000	0,2060	0,0000	0,0939	0,0000	0,0000
Priem.	0,6499	0,7000	0,1892	0,0095	0,0869	0,0198	0,0000
Odch.	0,0130	0,0000	0,0140	0,0162	0,0326	0,0313	0,0000

Tabuľka 4.10: Optimálne hodnoty účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni pre päť rôznych trojstupňových po stupňoch nezávislých scenárových stromov.

V tabuľke 4.11 je zobrazená investičná stratégia doplnená o priemerný nákup a predaj jednotlivých aktív v druhom stupni. V druhom stupni model navrhuje

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,7000	0,1892	0,0095	0,0869	0,0198	0,0000
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0000	0,1023	0,0040	0,0324	0,0111
	predaj	0,0515	0,0982	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.11: Investičná stratégia na dosiahnutie v požadovanej čiastky G v priemernom scenári.

diverzifikovať portfólio a investovať do každého aktíva nejakú časť prostriedkov.

Pozrieme sa ďalej na stratégiu investovania navrhnutú modelom v prípade najlepšieho scenára. Za najlepší scenár v našom modeli určíme taký, pre ktorý je hodnota podmienenej hodnoty v riziku minimálna. Optimálna stratégia v takomto prípade je uvedená v tabuľke 4.12.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,7000	0,1892	0,0095	0,0869	0,0198	0,0000
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0014	0,0771	0,0000	0,0676	0,0183
	predaj	0,1292	0,0000	0,0000	0,0352	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.12: Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najlepšom scenári.

V prípade najlepšieho scenára radí model investovať menšiu čiastku do rizikového tretieho aktíva ako v prípade priemerného scenára v druhom stupni. Ďalej neodporúča predávať druhé aktívum, naopak malú čiastku radí dokúpiť.

Nakoniec pridáme podobnú tabuľku aj pre najhorší scenár, charakterizovaný najvyššou podmienenou hodnotou v riziku.

V tabuľke 4.13 je uvedená investičná stratégia pre najhorší scenár vývoja výnosov. Podľa očakávania radí model v tomto scenári investovať najviac do šiesteho aktíva s pomedzi všetkých troch scenárov a skoro tak do tretieho aktíva ako v priemernom scenári. Zároveň radí predať najväčšiu časť prvého aktíva zo všetkých troch scenárov.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,7000	0,1892	0,0095	0,0869	0,0198	0,0000
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0108	0,0933	0,0000	0,0871	0,0274
	predaj	0,1935	0,0000	0,0000	0,0251	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.13: Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najhoršom scenári.

V tejto časti sme uviedli dvojstupňový a trojstupňový po stupňoch nezávislý scenárový strom a testovali sme ich vhodnosť použitia do optimalizačného modelu. Pre oba stupne dáva po stupňoch nezávislý strom stabilné výsledky, pre trojstupňový prípad sa správne mení stratégia rozhodnutia podľa scenára vývoja výnosov. V ďalšej časti sa zameriame na scenárový strom závislý na markovskom reťazci.

4.3 Kombinácia s markovským reťazcom

V predchádzajúcej časti sme na reprezentáciu náhodného výnosu použili po stupňoch nezávislý scenárový strom. Prebrali sme vhodnosť použitia dvojstupňového aj trojstupňového prípadu. V tejto časti predpokladáme, že realizácie náhodného výnosu závisia od stavu markovského reťazca s diskretným časom v jednotlivých stupňoch. Budeme uvažovať markovský reťazec, ktorý môže nadobúdať dva stavy, 0 a 1. Obdobie nízkych výnosov, prípadne vysokej volatility výnosov v rámci jedného roka budeme nazývať krízové obdobie a priradíme mu stav 1. Obdobie, ktoré nie je krízové, označíme ako bezkrízové a priradíme mu stav 0. Dáta neobsahujú žiadne pozorovanie ani definíciu krízového, respektíve bezkrízového obdobia, preto si zavedieme vlastnú definíciu a doplníme dáta o ďalšiu informáciu, či bol daný mesiac krízový z pohľadu výšky výnosu a volatility, alebo nie. Na vytvorenie časového radu stavov markovského reťazca použijeme diagnostiku nestability modelu lineárnej regresie pomocou rekurentnej metódy najmenších štvorcov. Teoretický popis metódy preberáme z knihy [Cipra \(2008\)](#).

4.3.1 Rekurentná metóda najmenších štvorcov

Pre $T \in \mathbb{N}$ uvažujme model lineárnej regresie

$$y_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

kde y_t je vysvetľovaná premenná, \mathbf{x}_t je vektor vysvetľujúcich premenných, $\boldsymbol{\beta}$ je vektor neznámych parametrov a $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ je reziduálna zložka modelu, $\sigma^2 > 0$. Predpokladáme, že \mathbf{x} a $\boldsymbol{\beta}$ sú vektory typu $k \times 1$. V rámci rekurentnej metódy počítame pre každé $t = k + 1, \dots, T$ odhad modelu

$$y_\tau = \mathbf{x}_\tau^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_\tau, \quad \tau = 1, \dots, t - 1$$

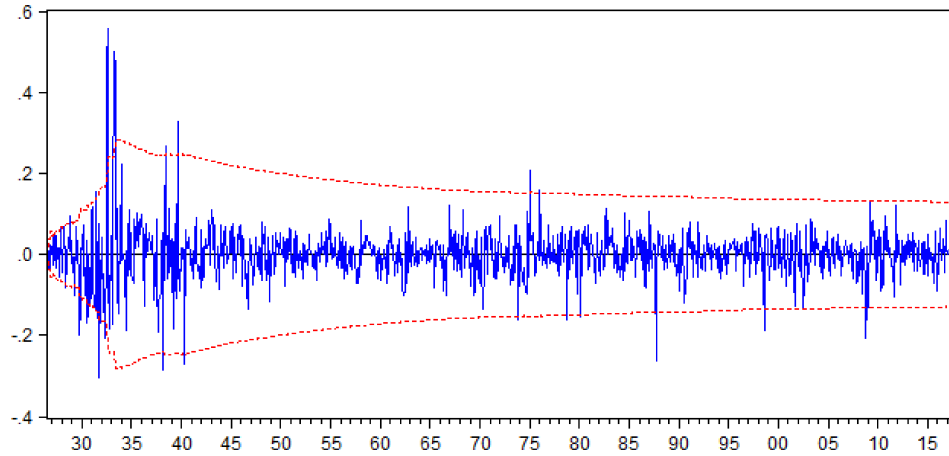
metódou najmenších štvorcov a odhadnutý parameter označíme \mathbf{b}_{t-1} . Po vypočítaní odhadu získame predpoveď $y_t = \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1}$ s chybou predpovede $e_t = y_t - \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1}$. Rozptyl chyby predpovede je $\sigma^2(1 + \mathbf{x}_t^\top (\mathbf{X}_{t-1}^\top \mathbf{X}_{t-1})^{-1} \mathbf{x}_t)$, kde \mathbf{X}_{t-1}

je matica vysvetľujúcich premenných \mathbf{x}_{t-1} (Cipra (2008)). Odhad metódou najmenších štvorcov opakujeme, až dokým nevyužijeme všetkých T pozorovaní, čím dostaneme $T - k + 1$ odhadov parametru β . Rekurentné rezíduá definujeme ako

$$w_t = \frac{(y_t - \mathbf{x}_t^\top \mathbf{b}_{t-1})}{(1 + \mathbf{x}_t^\top (\mathbf{X}_{t-1}^\top \mathbf{X}_{t-1})^{-1} \mathbf{x}_t)^{\frac{1}{2}}}, \quad t = k + 1, \dots, T$$

Body nestability budeme hľadať pre časový rad vytvorený spriemerovaním výnosov zo šiestich aktív v každom čase. Toto zjednodušenie považujeme za adekvátne vzhľadom na relatívne vysoké korelácie medzi jednotlivými aktívami.

Za lineárny model zvolíme jednoduchý model, v ktorom modelujeme priemerný výnos všetkých aktív v čase pomocou konštantnej pravej strany. Odhad parametru metódou najmenších štvorcov je v tomto prípade aritmetický priemer všetkých pozorovaní do času $t - 1$. Na prvý odhad regresného modelu máme iba jedno pozorovanie. Postupne rozširujeme dátovú množinu a tvoríme odhady. Po odhadnutí modelu uskutočníme predpoveď na nasledujúci mesiac a vypočítame rekurzívne rezíduá. K rezíduám dopočítame 95% interval spoľahlivosti. Pokiaľ je rezíduum signifikantne záporné, znamená to, že výnos v danom mesiaci je signifikantne nižší ako doterajší priemer. Takýto mesiac označíme za bod nestability. Analogicky to platí pre signifikantne kladné rezíduum. Pomocou bodov nestability identifikujeme krízové obdobie ako obdobie nízkych výnosov, prípadne vysokej volatility výnosov v rámci jedného roka.



Obr. 4.1: Rekurzívne rezíduá.

Na obrázku 4.1 sú znázornené rekurzívne rezíduá okolo nulovej hodnoty. Pre každý bod je vykreslený dvojnásobok smerodajnej odchýlky s kladným aj záporným znamienkom, ktoré určujú 95% interval spoľahlivosti. Pokiaľ rekurzívne rezíduum prekročí v danom mesiaci interval spoľahlivosti, daný bod interpretujeme ako bod nestability modelu, pre ktorý nie je vhodný nami navrhnutý konštantný model. To znamená, že ide o signifikantný výkyv v časovom rade priemerných výnosov. Mesiac, v ktorom je rekurentné rezíduum signifikantne záporné, definujeme ako začiatok obdobia nízkych výnosov.

Týmto posupom odhadneme časový rad so stavmi 0 a 1, určujúcimi krízové a bezkrízové obdobie. O časovom rade predpokladáme, že ide o markovský reťazec. V tabuľke 4.14 sú uvedené pravdepodobnosti prechodu medzi jednotlivými stavmi markovského reťazca. Pravdepodobnosti prechodu určíme pomocou vzťahu

$$p_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{\sum_{k=0}^1 n_{i,k}},$$

kde $n_{i,k}$, $i, k \in \{0, 1\}$ je počet prechodov zo stavu i do stavu k .

Stav	0	1
0	0,9880	0,0120
1	0,1348	0,8652

Tabuľka 4.14: Pravdepodobnosti prechodu medzi stavmi markovského reťazca.

Pokiaľ sme v bezkrízovom období, pravdepodobnosť, že v ňom naďalej ostane je 98,8 %. Naopak pravdepodobnosť, že prejdeme do krízového obdobia je 1,2 %. Pokiaľ už v krízovom období sme, tak pravdepodobnosť, že sa vrátíme do bezkrízového obdobia, je približne 13,5 % a pravdepodobnosť zotrvania v krízovom období je približne 86,5 %.

4.3.2 Dáta

Pomocou vytvoreného markovského reťazca rozdelíme dátový súbor na dva, kde prvý obsahuje dáta za bezkrízové obdobie a druhý za krízové. V tabuľke 4.15 sú vypočítané základné popisné štatistiky dátového súboru obmedzeného len na bezkrízové obdobie. Dátový súbor pre bezkrízové obdobie obsahuje 978 pozorovaní.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,7918	0,7850	0,7552	0,8633	0,8635	0,7682
Arit. priemer	1,0114	1,0142	1,0161	1,0105	1,011	1,0130
Maximum	1,3294	1,2856	1,3834	1,2139	1,1682	1,2414
Smer. odchýlka	0,0622	0,0526	0,0582	0,0433	0,0405	0,0516
Šikmost	0,0874	-0,1400	0,0314	-0,0534	-0,0373	-0,2185
Špicatost	4,4770	5,0343	6,3203	3,7032	4,0158	5,1432
Počet	896	896	896	896	896	896

Tabuľka 4.15: Základné popisné štatistiky pre bezkrízové obdobie.

vaní. Minimálny výnos každého aktíva je vyšší ako v pôvodnom dátovom súbore, naopak maximálny výnos je nižší ako v pôvodnom dátovom súbore. Vzárostol aj aritmetický priemer výnosov každého aktíva. Odstránenie krízových období znížilo smerodajnú odchýlku výnosov, v porovnaní s prvým dátovým súborom.

V tabuľke 4.16 sú vypočítané základné popisné štatistiky dátového súboru obmedzeného len na krízové obdobia.

Dátový súbor pre krízové obdobie obsahuje 82 pozorovaní. Minimálny výnos každého aktíva je nižší ako v bezkrízovom období, naopak maximálny výnos je vyšší. S tým súvisia aj vyššie smerodajné odchýlky pre každé aktívum. Aritmetický priemer výnosov každého aktíva je v krízovom období nižší ako v bezkrízovom.

Aktívum	1	2	3	4	5	6
Minimum	0,6761	0,6995	0,6617	0,7113	0,7185	0,6489
Arit. priemer	0,9929	0,9998	1,0062	0,9948	0,9968	1,0073
Maximum	1,5994	1,6220	1,8358	1,3374	1,5189	1,6778
Smer. odchýlka	0,1672	0,1737	0,2149	0,1202	0,1478	0,1842
Šikmosť	1,1029	1,3409	1,7073	0,2410	1,2699	1,4156
Špicatost	5,3484	5,9442	6,9040	3,6833	6,2110	6,2140
Počet	82	82	82	82	82	82

Tabuľka 4.16: Základné popisné štatistiky pre krízové obdobie.

4.3.3 Dvojstupňový scenárový strom

Na začiatok riešime optimalizačnú úlohu pomocou dvojstupňového scenárového stromu závisiaceho na markovskom reťazci. Stav markovského reťazca v koreni stromu definujeme ako bezkrízové obdobie. Pomocou metódy momentov vygenerujeme 10000 scenárov, z toho 5000 scenárov pre bezkrízové obdobie a 5000 scenárov pre krízové obdobie. Všetky parametre optimalizačného modelu ponecháme rovnaké, ako v prípade nezávislého dvojstupňového scenárového stromu. Úlohu riešime s horným obmedzením čiastky, ktorú môžeme investovať do každého aktíva na 0,7. Postupne vygenerujeme päť rôznych scenárových stromov a vypočítame optimalizačnú úlohu.

Strom	Opt.	1	2	3	4	5	6
1	0,3481	0,6933	0,0717	0,0000	0,0994	0,1355	0,0000
2	0,3562	0,6208	0,0000	0,0117	0,0551	0,3122	0,0000
3	0,3574	0,7000	0,0000	0,0000	0,0622	0,2377	0,0000
4	0,3580	0,6905	0,0202	0,0279	0,1244	0,1368	0,0000
5	0,3571	0,7000	0,0000	0,0000	0,0270	0,2729	0,0000
Priem.	0,3554	0,6809	0,0184	0,0079	0,0736	0,2190	0,0000
Odch.	0,0041	0,0339	0,0311	0,0123	0,0384	0,0801	0,0000

Tabuľka 4.17: Optimálna hodnota účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni pre päť rôznych stromov závislých na markovskom reťazci.

V tabuľke 4.17 sú zobrazené optimálne hodnoty účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni pre päť rôznych scenárových stromov. V posledných dvoch riadkoch je vypočítaný aritmetický priemer a smerodajná odchýlka hodnôt cez všetky scenárové stromy. V tabuľke 4.17 testujeme stabilitu optimalizačného modelu v rámci jedného dátového súboru. Hodnoty účelových funkcií sa pre jednotlivé stromy výrazne nemenia, čo nám naznačuje vhodnosť scenárovej štruktúry na použitie v optimalizačnom modeli, pokiaľ sa rozhodujeme na základe vnútornej stability modelu. Optimalizačný model radí investovať prevažnú časť majetku do prvého aktíva, do posledného aktíva, do posledného aktíva radí model neinvestovať. Do tretieho aktíva radí model investovať v dvoch prípadoch, vo zvyšných troch model neradí investovať ani do tretieho aktíva.

Označme scenárové stromy symbolmi S_1, \dots, S_5 . Strom S_1 definujeme ako primárny strom a v tabuľke 4.18 porovnáme euklidovskú vzdialenosť medzi optimálnymi hodnotami účelových funkcií a optimálnych riešení v prvom stupni primárneho stromu a zvyšnými stromami. Podobne ako v prípade nezávislého stromu

Stromy	Vzdial. opt.	Vzdial. rieš.
$S_1 \times S_2$	0,0057	0,0696
$S_1 \times S_3$	0,0079	0,0938
$S_1 \times S_4$	0,0052	0,1451
$S_1 \times S_5$	0,0076	0,1107

Tabuľka 4.18: Euklidovská vzdialenosť optimálnych riešení a účelovej funkcie medzi primárnym stromom a ostatnými stromami.

vidíme v tabuľke 4.18 malú zmenu vzdialenosti účelovej funkcie medzi primárnym stromom a zvyšnými.

V ďalšej tabuľke otestujeme stabilitu optimalizačného modelu mimo pôvodný dátový súbor z ktorého sme vygenerovali scenárové stromy. Na generovanie nového scenárového stromu použijeme testovacie dáta, oddelené na začiatku výpočetnej časti. K dispozícii máme 125 pozorovaní z testovacieho dátového súboru, ktorý podobne ako prvý dátový súbor rozdelíme na krízové a bezkrízové obdobie. Na rozdelenie použijeme metódu rekurzívnych rezíduí. Po rozdelení máme v rámci krízového obdobia k dispozícii len sedem pozorovaní, konkrétne krízové obdobie medzi rokmi 2008 a 2009. Zvyšných 118 pozorovaní priradíme do bezkrízového obdobia.

Strom	pôvodné riešenie	$f(\mathbf{x}_i^*; S_n)$
1	{0,6933; 0,0717; 0,0000; 0,0994; 0,1355; 0,0000}	0,3877
2	{0,6208; 0,0000; 0,0117; 0,0551; 0,3122; 0,0000}	0,3911
3	{0,7000; 0,0000; 0,0000; 0,0622; 0,2377; 0,0000}	0,3956
4	{0,6905; 0,0202; 0,0279; 0,1244; 0,1368; 0,0000}	0,3919
5	{0,7000; 0,0000; 0,0000; 0,0270; 0,2729; 0,0000}	0,3919
Aritmetický priemer		0,3916
Smerodajná odchýlka		0,0028

Tabuľka 4.19: Hodnota účelovej funkcie pre pôvodné riešenie v prvom stupni a nový scenárový strom.

V tabuľke 4.19 sú uvedené hodnoty účelovej funkcie pre pôvodné rozhodnutia po dosadení stromu vygenerovaného mimo pôvodný dátový súbor. Vidíme, že sa hodnota účelovej funkcie výrazne nemení, preto pokiaľ určíme stabilitu mimo pôvodný dátový súbor ako kritérium vhodnosti scenárového stromu, scenárový strom závislý na markovskom reťazci sa zdá byť vhodný na použitie v nami definovanom optimalizačnom modeli.

Optimalizačná stratégia pre model vychádzajúci zo scenárového stromu závislom na markovskom reťazci nie je výrazne odlišná od po stupňoch nezávislého prípadu.

4.3.4 Trojstupňový scenárový strom

V tejto časti budeme generovať trojstupňové scenárové stromy závislé na markovskom reťazci, ktoré použijeme ako vstup do optimalizačného modelu. Počet uzlov v druhom stupni stanovíme na 300. Každý uzol v druhom stupni má 300 potomkov v treťom stupni. Dokopy teda generujeme scenárový strom s 90000

scenármi. Parametre optimalizačného modelu ponecháme rovnaké, ako v prípade trojstupňového po stupňoch nezávislého stromu. Postupne vygenerujeme päť scenárových stromov závislých na markovskom reťazci a pozorujeme stabilitu v rámci použitého dátového súboru. Nakoniec určíme priemernú investičnú stratégiu v druhom stupni a stratégiu pre najhorší a najlepší scenár.

V tabuľke 4.20 sú uvedené optimálne riešenia v prvom stupni a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre každý z piatich vygenerovaných scenárových stromov.

Strom	Opt.	1	2	3	4	5	6
1	0,6159	0,5576	0,1784	0,0000	0,1666	0,0000	0,0973
2	0,6833	0,6565	0,0094	0,0000	0,0918	0,2422	0,0000
3	0,6759	0,6952	0,0024	0,0000	0,0876	0,2147	0,0000
4	0,6504	0,6303	0,0432	0,0000	0,0001	0,3263	0,0000
5	0,6760	0,7000	0,0329	0,0000	0,0306	0,2364	0,0000
Priem.	0,6603	0,6479	0,0533	0,0000	0,0753	0,2039	0,0195
Odch.	0,0278	0,0581	0,0719	0,0000	0,0641	0,1217	0,0435

Tabuľka 4.20: Hodnota účelovej funkcie a optimálnych hodnôt v prvom stupni úlohy trojstupňového programovania.

Pokiaľ sa pozeráme na vhodnosť scenárovej štruktúry z pohľadu stability optimalizačného modelu v rámci jedného dátového súboru, na základe tabuľky 4.20 sa javí trojstupňový scenárový strom závislý na markovskom reťazci ako vhodný na použitie pre náš optimalizačný model. Podobne ako v po stupňoch nezávislom strome aj v tomto prípade radí model investovať hlavne do prvého aktíva, do tretieho a šiesteho aktíva radí model neinvestovať, až na prípad šiesteho aktíva v modeli s prvým vygenerovaným scenárovým stromom.

V tabuľke 4.21 uvidíme priemernú investičnú stratégiu pre trojstupňový scenárový strom závislý na markovskom reťazci.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,6479	0,0533	0,0000	0,0753	0,2039	0,0195
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0000	0,0005	0,0050	0,0210	0,0015
	predaj	0,0195	0,0084	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.21: Priemerná investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G .

Vidíme, že prerozdelenie portfólia v druhom stupni je nižšie, ako v prípade po stupňoch nezávislého scenárového stromu. Podobnú tabuľku pridáme aj pre investičnú stratégiu pre najlepší scenár vývoja výnosov, to znamená scenár, pre ktorý je podmienená hodnota v riziku nanajnižšia.

V prípade najlepšieho scenáru model odporúča predať podstatnú časť prvého aktíva a investovať získanú čiastku do tretieho a piateho aktíva. V tabuľke 4.23 Nakoniec uvidíme tabuľku pre najhorší scenár, to znamená scenár, pre ktorý je podmienená hodnota v riziku navyššia.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,6479	0,0533	0,0000	0,0753	0,2039	0,0195
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0000	0,0000	0,1828	0,3919	0,0000
	predaj	0,3776	0,1971	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.22: Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najlepšom scenári vývoja výnosov.

Stupeň		1	2	3	4	5	6
1	nákup	0,6479	0,0533	0,0000	0,0753	0,2039	0,0195
	predaj	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	nákup	0,0000	0,0000	0,1303	0,0000	0,1691	0,0110
	predaj	0,2189	0,0676	0,0000	0,0239	0,0000	0,0000

Tabuľka 4.23: Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najhoršom scenári vývoja výnosov.

4.4 Porovnanie scenárových štruktúr

V tejto kapitole sme generovali rôzne scenárové štruktúry a testovali ich vhodnosť z hľadiska stability výstupov optimalizačného modelu. Ako prvý sme generovali dvojstupňové po stupňoch nezávislé stromy a testovali sme stabilitu optimalizačného modelu. Pre prípad dvojstupňovej optimalizačnej úlohy sme generovali po stupňoch nezávislé scenárové stromy a scenárové stromy závislé od stavov markovského reťazca. V oboch prípadoch sme testovali stabilitu modelu pri zmene scenárového stromu v rámci jedného dátového súboru a stabilitu riešení pri voľbe scenárového stromu mimo pôvodný dátový model. Rovnako ako po stupňoch nezávislý strom, aj strom závislý od stavov markovského reťazca sa na základe týchto kritérií zdá byť vhodnou štruktúrou pre náš optimalizačný model. Optimalizačný model radí v oboch prípadoch investovať podstatnú časť majetku do prvého aktíva. Naopak do tretieho a šiesteho aktíva model odporúča investovať minimálne, respektíve vôbec. Tretie aktívum sme v popise dát identifikovali ako aktívum s historicky najvyšším pozorovaným výnosom a aktívum s najvyššou smerodajnou odchýlkou, a teda aj rizikom. V rámci šiesteho aktíva sme v dátach zaznamenali najnižší pozorovaný výnos a druhý najvyšší výnos z celého dátového súboru. Na základe podobných výstupov z pohľadu stability aj určenia optimalizačnej stratégie uprednostníme po stupňoch nezávislý strom vďaka jeho ľahšej aplikovateľnosti.

Nezávislý náhodný strom a strom závislý na markovskom reťazci sme vygenerovali aj pre trojstupňový optimalizačný problém. Na základe testovania stability modelu v rámci jedného dátového súboru sa zdajú byť obe scenárové štruktúry vhodné na použitie pre náš model. Podobne ako v dvojstupňovom prípade, aj trojstupňový model radí investovať najväčšiu časť majetku do prvého aktíva. V druhom stupni radia oba modely portfólio preusporiadať predajom časti prvých dvoch aktív a investovaním do zvyšných aktív v prípade nezávislého stromu a do tretieho a piateho aktíva v prípade závislého stromu na markovskom reťazci. Na základe porovnania modelov môžeme skonštatovať, že po stupňoch nezávislý scenárový strom je dostatočne vhodný na použitie v našom optimalizačnom modeli.

Použitie závislého stromu na markovskom reťazci neprinieslo výrazné zlepšenie modelu. Z toho sa nám zdá po stupňoch nezávislý model v porovnaní so závislým na markovskom reťazci vhodnejší vďaka jeho jednoduchšej štruktúre.

Záver

V práci sme sa venovali úlohám viacstupňového stochastického programovania v kontexte rôznej reprezentácie náhodného procesu. V prvej kapitole sme popísali všeobecnú úlohu matematického programovania a od jednostupňovej deterministickej formulácie sme prešli k viacstupňovému stochastickému programovaniu. V druhej kapitole sme podrobnejšie rozobrali prípad náhodného procesu s konečným diskretným rozdelením. Na reprezentáciu náhodného procesu s konečným diskretným rozdelením sme použili scenárové stromy. Popísali sme konštrukciu všeobecného scenárového stromu a uviedli sme dva špeciálne príklady, po stupňoch nezávislý scenárový strom a scenárový strom závislý na stavoch markovského reťazca. V stručnosti sme popísali vlastnosti scenárovej mriežky ako ďalšieho spôsobu reprezentácie náhodného procesu. Scenárové stromy sme generovali pomocou heuristického algoritmu, ktorého cieľom je vygenerovať realizácie s rovnakými prvými štyrmi momentmi a korelačnou maticou ako je definované na vstupe. Za optimalizačnú úlohu sme zvolili problém privátneho investora kde model vyberá portfólio, ktoré minimalizuje vážený súčet podmienených hodnôt v riziku v jednotlivých stupňoch.

V praktickej časti sme sa zamerali na testovanie vhodnosti použitia daného scenárového stromu v nami definovanom optimalizačnom modeli. Na základe metódy rekurzívnych rezíduí sme definovali krízové a bezkrízové obdobie a podľa toho rozdelili dátový súbor. Krízové a bezkrízové obdobia sme reprezentovali ako markovský reťazec. V dvojstupňovom prípade sme vygenerovali po stupňoch nezávislý strom a strom závislý na stavoch markovského reťazca. Optimalizačnú úlohu sme riešili pre viac vygenerovaných stromov v rámci jedného dátového súboru a pozorovali sme, ako sa mení hodnota účelovej funkcie a optimálne riešenie. Ani v prípade nezávislého stromu, ani stromu závislom na markovskom reťazci sme nepozorovali významné zmeny účelových funkcií pre rôzne vygenerované stromy. Obe scenárové štruktúry sa zdajú byť z pohľadu stability vhodné pre náš optimalizačný model. Pokiaľ by sme mali odporučiť iba jednu štruktúru, priklonili by sme sa k postupne nezávislému stromu. Jeho výhodou je hlavne ľahká implementácia, pretože uzly v danom stupni majú rovnakých potomkov, preto ich stačí v každom stupni vygenerovať iba raz. Zároveň optimalizačný model, do ktorého vstupuje závislý strom na markovskom reťazci nedáva výrazne lepšie výsledky z pohľadu stability ako model s po stupňoch nezávislým stromom. V trojstupňovom prípade sme okrem stability modelu navyše skúmali prerozdelenie portfólia v druhom stupni. V priemere nedochádza k výraznému prerozdeleniu portfólia po prvom stupni. Obe scenárové štruktúry sa na základe našich kritérií zdajú byť vhodné na použitie v našom optimalizačnom modeli. Vzhľadom na jednoduchšiu výstavbu po stupňoch nezávislého stromu by sme ho v prípade výberu uprednostnili pred závislým stromom na markovskom reťazci.

Prácu je možné rozšíriť viacerými smermi. Prvým možným rozšírením je použitie softvéru lepšie zvládajúceho výpočetnú náročnosť optimalizačnej úlohy. Tým by sme mohli pozorovať stabilitu modelu pre väčší počet scenárových stromov a navýšiť počet scenárov v rámci jednotlivých scenárových stromov. ďalším rozšírením je skúmať investičnú stratégiu vo viac ako trojstupňovom prípade. Určite zaujímavým rozšírením práce by bolo skúmanie iných scenárových štruktúr

ako scenárových stromov. Príkladom takej štruktúry je scenárová mriežka, ktorej vhodnosť sme už v praktickej časti netestovali, kvôli odlišnému prístupu k jej generovaniu a použitiu v optimalizačnej úlohe oproti nami skúmaným scenárovým stromom.

Zoznam použitej literatúry

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, pages 203–228.
- BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. a SHETTY, C. M. (2006). *Nonlinear programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York.
- BIRGE, J. R. a LOUVEAUX, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Second edition. Springer, New York. ISBN 978-1-4614-0236-7.
- BLACK, F., DERMAN, E. a TOY, W. (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, **46**(1), 33.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- DUPAČOVÁ, J. a LACHOUT, P. (2011). *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-176-7.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0840-6.
- GÜLPINAR, N., RUSTEM, B. a SETTERGREN, R. (2003). Multistage Stochastic Mean-Variance Portfolio Analysis with Transaction Costs. *Innovations in Financial and Economic Networks*, **3**(7), 46–63.
- HØYLAND, K., KAUT, M. a WALLACE, S. W. (2003). A Heuristic for Moment-Matching Scenario Generation. *Computational Optimization and Applications*, **24**(2-3), 169–185.
- KALL, P. a MAYER, J. (2005). *Stochastic linear programming: Models, Theory and Computation*. Springer, New York. ISBN 0-387-23385-7.
- KAUT, M. a WALLACE, S. W. (2007). Evaluation of Scenario-Generation Methods for Stochastic Programming. *Pacific Journal of Optimization*, **3**(2), 257–271.
- LAURENT, A. (2006). *A Scenario Generation Algorithm for Multistage Stochastic Programming: Application for Asset Allocation Models with Derivatives*. Ph.D. thesis. Faculty of Economics, Department of Finance, University of Lugano, Lugano, Switzerland.
- MALÁ, A. (2014). *Scenárové stromy v úlohách stochastického programování*. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- PHILPOTT, A. B. a DE MATOS, V. L. (2012). Dynamic sampling algorithms for multi-stage stochastic programs with risk aversion. *European Journal of Operational Research*, **218**, 470–483.

- ROCKAFELLAR, R. T. a URYASEV, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance*, **26**(7), 1443–1471.
- SHAPIRO (2009). On a time consistency concept in risk averse multistage stochastic programming. *Operations Research Letters*, **37**, 143–147.
- SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D. a RUSZCZYŃSKI, A. (2009). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Second edition. Siam and mps, Philadelphia. ISBN 978-1-611973-42-6.

Zoznam obrázkov

1.1 Grafické znázornenie rozhodovacieho procesu v úlohe viacstupňového stochastického programovania.	6
2.1 Uzly v scenárovom strome.	10
2.2 Realizácie v scenárovom strome.	11
2.3 Po stupňoch nezávislý scenárový strom.	16
2.4 Stavy markovského reťazca.	17
2.5 Scenárový strom závislý na stave Markovského reťazca.	23
2.6 Realizácie binomickej scenárovej mriežky.	24
2.7 Uzly binomickej scenárovej mriežky.	24
4.1 Rekurzívne rezíduá.	41

Zoznam tabuliek

3.1	Vlastnosti rozdelenia náhodného vektoru ξ .	26
4.1	Základné popisné štatistiky šiestich aktív, ktoré použijeme na skladanie portfólia.	33
4.2	Korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami.	34
4.3	Prvé štyri momenty štandardizovaných výnosov.	35
4.4	Prvé štyri momenty transformovaných výnosov na základe vety 2.	35
4.5	Optimálna hodnota účelovej funkcie a optimálne rozhodnutie v prvom stupni úlohy dvojstupňového programovania bez obmedzenia na nákup.	36
4.6	Optimálna hodnota účelovej funkcie a rozhodnutia v prvom stupni úlohy dvojstupňového programovania s obmedzením na nákup.	36
4.7	Euklidovská vzdialenosť riešení a účelovej funkcie medzi primárnym stromom a ostatnými.	37
4.8	Základné popisné štatistiky druhej časti dátového súboru.	37
4.9	Hodnota účelovej funkcie pre pôvodné riešenie v prvom stupni a nový scenárový strom.	38
4.10	Optimálne hodnoty účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni pre päť rôznych trojstupňových po stupňoch nezávislých scenárových stromov.	39
4.11	Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v priemernom scenári.	39
4.12	Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najlepšíom scenári.	39
4.13	Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najhoršom scenári.	40
4.14	Pravdepodobnosti prechodu medzi stavmi markovského reťazca.	42
4.15	Základné popisné štatistiky pre bezkrízové obdobie.	42
4.16	Základné popisné štatistiky pre krízové obdobie.	43
4.17	Optimálna hodnota účelovej funkcie a optimálne rozhodnutia v prvom stupni pre päť rôznych stromov závislých na markovskom reťazci.	43
4.18	Euklidovská vzdialenosť optimálnych riešení a účelovej funkcie medzi primárnymi stromom a ostatnými stromami.	44
4.19	Hodnota účelovej funkcie pre pôvodné riešenie v prvom stupni a nový scenárový strom.	44
4.20	Hodnota účelovej funkcie a optimálnych hodnôt v prvom stupni úlohy trojstupňového programovania.	45
4.21	Priemerná investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G .	45
4.22	Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najlepšíom scenári vývoja výnosov.	46
4.23	Investičná stratégia na dosiahnutie požadovanej čiastky G v najhoršom scenári vývoja výnosov.	46

Zoznam použitých skratiek

- \mathbb{N} množina prirodzených čísel
- \mathbb{R} množina reálnych čísel
- M množina prípustných riešení
- f účelová funkcia
- \mathcal{X} definičný obor funkcií obmedzení
- z.p. za podmienky, za podmienok
- Ω neprázdna množina
- \mathcal{A} σ -algebra podmnožín množiny Ω
- (Ω, \mathcal{A}) merateľný priestor
- P pravdepodobnostná miera na \mathcal{A}
- (Ω, \mathcal{A}, P) pravdepodobnostný priestor
- s.i. skoro iste